Institut für Produktionsmesstechnik
Technische Universität Braunschweig

Klausur

Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

27. 06. 2014

Name: ....

Matrikel-Nr.: ....

Lfd. Nummer (von Bioinformatik-Klausur) ....

Aufgabe	Kurzfragen	1	2	Gesamt
Punkte				

Formelsammlung

Binomialverteilung

$$\mathrm{Bin}(n,p) : P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ableitungsregeln:

Produktregel

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Kettenregel

$$\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \text{ für } y = u(v(x))$$

Temperaturskalen:

$$0\,^\circ\mathrm{C} \mathrel{\widehat{=}} 273{,}15\,\mathrm{K}$$

Kurzfragen

1. Ein Messsystem reagiere auf ein sich sprunghaft änderndes Eingangssignal ohne Überschwingen. Kann daraus sicher gefolgert werden, daß es ein lineares System erster Ordnung ist? Begründung?

2. Welche Angabe benötigt man zusätzlich zu Mittelwert und Streuung einer normalverteilten Stichprobe, um eine Aussage über den Vertrauensbereich mit einer statistischen Sicherheit P%=95% dieser Stichprobe machen zu können?

3. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 einer Poisson-Verteilung?

4. Bei welchem Wert auf der x-Achse liegt das Maximum einer standardisierten Normalverteilung? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der genau dieser Wert bei einer Stichprobe auftritt und begründen Sie Ihre Antwort!

5. Wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung liegen zusammengenommen unterhalb des ersten (Q1) oder oberhalb des vierten Quintils (Q4)?

6. Aus welchen Elementen besteht eine Messeinrichtung?

7. Ein Galvanometer zur Strommessung enthält eine drehbar gelagerte Spule. Mit zunehmendem Strom durch die Spule erwärmt sich diese und ihr Widerstand steigt. Damit verändert sich der Innenwiderstand des Messgerätes, was zu einer Messabweichung führt. Welche Art von Störeinfluss liegt vor?

8. An welchen Stellen befinden sich die Wendepunkte der Gaußschen Normalverteilung?

9. Nennen Sie 4 Basisgrößen des SI-Systems und deren Einheit.

Aufgabe 1

Ein Thermoelement wandelt durch Thermoelektrizität Wärme in elektrische Energie um. Dazu werden zwei Leiter aus unterschiedlichen Materialien elektrisch miteinander verbunden. An die freien Enden der beiden Drähte wird eine Messeinrichtung zur Auswertung der Spannung angeschlossen, die entsteht, wenn die Verbindungsstelle der beiden Drähte und die Übergabestellen an die Messeinrichtung mit unterschiedlichen Temperaturen beaufschlagt werden (Seebeck-Effekt).

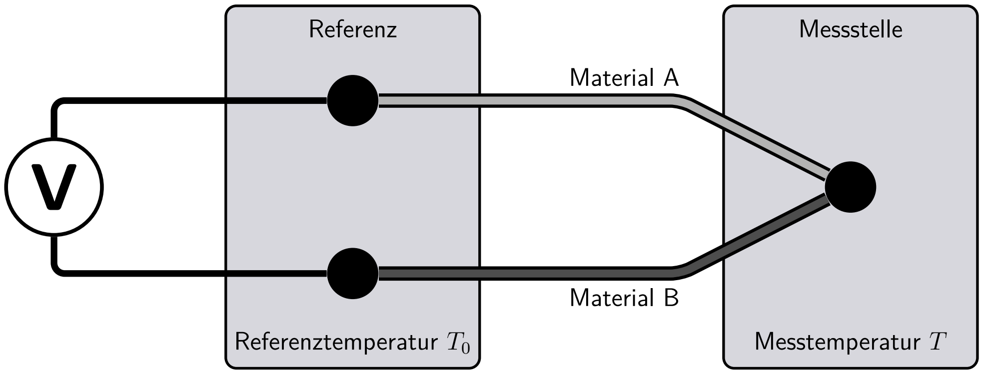


Bild 1: Schematische Darstellung eines Thermoelements

Die Materialien A und B bilden ein Thermoelement, dessen Spannung U von den Seebeck-Koeffizienten S_A und S_B der verwendeten Materialien sowie der Messtemperatur T und der Referenztemperatur T_0 abhängig ist:

$$U = (S_\mathrm{A} - S_\mathrm{B}) \cdot (T - T_0)$$

Im Folgenden soll die mittels eines Eisen-Konstantan-Thermoelements gemessene Temperatur T auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen S_A, S_B, U und T_0 einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Seebeck-Koeffizient S_A von Konstantan wird vom Lieferanten mit $S_\mathrm{A} = -35\,\mu V/K \pm 0,2\,\mu V/K$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P% = 99% und sehr großem n angegeben. Der Hersteller des Eisendrahts gibt den Seebeck-Koeffizienten S_B mit $S_\mathrm{B} = 19\,\mu V/K \pm 0,1\,\mu V/K$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P% = 95% und sehr großem n an.

Die Vergleichstemperatur T_0 wird von einem sogenannten Vergleichsstellenthermostat auf $T_0 = 50°\mathrm{C} \pm 0,1°\mathrm{C}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P% = 99% gehalten.

Die Thermospannung U wurde mit Hilfe eines Messverstärkers zehnmal gemessen. Dabei wurden die in der folgenden Tabelle angegebenen Einzelmesswerte ermittelt.

Messung (i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U (in µV)	734,4	733,9	739,3	737,1	730,1	735,5	728,5	751,1	750,1	740,9

Berechnen Sie die gesuchte Temperatur T und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P% = 99% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

Aufgabe 2

Unter 1.000 zufällig ausgewählten Familien mit 3 Kindern ergibt sich folgende Häufigkeitstabelle für die Anzahl der Töchter:

Anzahl Töchter	0	1	2	3
Häufigkeit	140	349	351	160

Untersuchen Sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob diese Häufigkeitsverteilung bei Verwendung einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ mit der Hypothese vereinbar ist, dass die Anzahl der Töchter in Familien mit 3 Kindern Bin$(3;\ 50\%)$-verteilt ist.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f \, , \, f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

Varianzanalyse

Mit der Varianzanalyse kann geprüft werden, ob verschiedene Stichproben zu einer Grundgesamtheit gehören.

- Die Nullhypothese H_0 lautet: Alle Stichproben haben den gleichen Erwartungswert.
- Die Alternativhypothese H_1 lautet: Es gibt mindestens zwei Stichproben a, b mit $\mu_a \neq \mu_b$

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{total} = SQZ + SQI$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{x}_j-\overline{x})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2$$

k: Anzahl Stichproben

n_j: Anzahl Wiederholungen innerhalb der Stichproben

$n = \sum_{j=1}^{k} n_j$: Gesamtanzahl der Messwerte

1. Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQI innerhalb der Stichproben:

$$SQI = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2$$

2. Berechnung der mittleren Quadratsummen MQI innerhalb der Stichproben:

$$MQI = \frac{SQI}{n-k}$$

Analog zur Berechnung der Streuungen wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekannten Mittelwerten sind das n – k unabhängige Elemente.

3. Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQZ zwischen den Stichproben:

$$SQZ = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{x}_j-\overline{x})^2$$

mit

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j\overline{x}_j$$

4. Berechnung der mittleren Quadratsumme MQZ zwischen den Stichproben:

$$MQZ = \frac{SQZ}{k-1}$$

Analog zur Berechnung der Streuung wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekanntem Mittelwert sind das k – 1 unabhängige Elemente.

5. Berechnung der Testgröße:

$$F = \frac{MQZ}{MQI}$$

Die Testgröße F soll bei Zutreffen der Hypothese H_0 einer F-Verteilung genügen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $f_1 = k - 1$ und $f_2 = n - k$.

6. Bestimmung der Grenze anhand der F-Verteilung zum Signifikanzniveau α:

$$F_{k-1;n-k;1-\alpha}$$

Dieser so genannte kritische Wert wird aus Tabellen entnommen.

7. H_0 wird abgelehnt sobald gilt:

$$F > F_{k-1;n-k;1-\alpha}$$

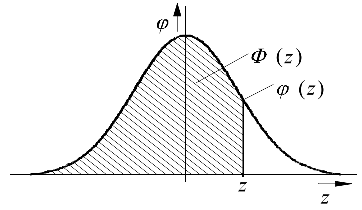
Anderenfalls besteht kein Anlass, H_0 zu verwerfen.

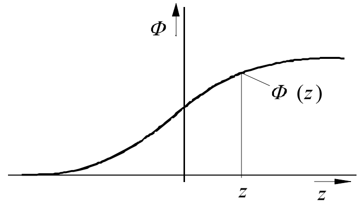
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,7	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,93
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,06
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,15	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82
24	1,71	2,06	2,49	2,80
26	1,71	2,06	2,48	2,78
28	1,70	2,05	2,47	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
100	1,66	1,98	2,37	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10
1	$3{,}9\cdot10^{-5}$	$1{,}6\cdot10^{-4}$	$9{,}8\cdot10^{-4}$	$3{,}9\cdot10^{-3}$	$1{,}6\cdot10^{-2}$
2	$1{,}0\cdot10^{-2}$	$2{,}0\cdot10^{-2}$	$5{,}1\cdot10^{-2}$	0,103	0,211
3	$7{,}2\cdot10^{-2}$	$1{,}1\cdot10^{-1}$	0,216	0,352	0,584
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

90%-Quantile $F_{r,s,0{,}90}$ der F-Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	61,22	61,74
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,42	9,44
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,20	5,18
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,87	3,84
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,24	3,21
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,87	2,84
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,63	2,59
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,46	2,42
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,34	2,30
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,24	2,20
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,10	2,06
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,01	1,96
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,94	1,89
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,89	1,84
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,84	1,79
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,72	1,67
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,66	1,61
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,63	1,57
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,56	1,49
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,49	1,42

95%-Quantile $F_{r,s,0{,}95}$ der F-Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95	248,01
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57