

Klausur

Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

1.3.2013

Name:

Matrikel-Nr.:

Aufgabe	Kurzfragen	1	2a	2b	Gesamt
Punkte					

Kurzfragen

1. Was versteht man unter einer direkten Messmethode im engeren Sinne?
2. Aus welchen Elementen besteht ein vollständiges Messergebnis?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit überdeckt ein Vertrauensintervall für den Erwartungswert der Breite 2σ den zugrundeliegenden Mittelwert \bar{x} .
4. Welche elementaren Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit eine Größe gemessen werden kann?
5. Warum ist es nicht sinnvoll, den Mittelwert von Schulnoten zu berechnen.
6. Wie groß ist jeweils die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion
 - a) für eine Poissonverteilung $Po(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ mit dem Parameter $\lambda = 1$
 - b) für eine Gaußsche Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 0,5$
7. Das Shannontheorem beschreibt die Bedingungen, die bei der Abtastung eines Signals erfüllt sein müssen, um dieses vollständig rekonstruieren zu können. Eine dieser Bedingungen ist, dass das Signal „bandbegrenzt“ ist. Was bedeutet dieses?
8. Erläutern Sie die möglichen Fehlentscheidungen, die bei statistischen Tests auftreten können!

Aufgabe 1.

Ein Hersteller fertigt Präzisionsrubinkugeln zur Anwendung in der Koordinatenmesstechnik. Während der Herstellung werden zur Kontrolle der Fertigungsqualität regelmäßig Stichproben genommen und der Kugeldurchmesser gemessen. Bei einer Stichprobe aus einem Fertigungslos von 10mm-Kugeln (Stichprobenumfang $n = 50$) ergaben sich dabei Durchmesserabweichungen vom mittleren Durchmesser der gesamten Stichprobe mit folgenden Häufigkeiten:

Durchmesserabw. ($x_i - \bar{x}$) in μm	Häufigkeit
$< -0,5$	0
$[-0,5; -0,3)$	5
$[-0,3; -0,1)$	15
$[-0,1; 0,1)$	13
$[0,1; 0,3)$	11
$[0,3; 0,5)$	6
$> 0,5$	0

Die Streuung der Durchmesser beträgt $0,242 \mu\text{m}$.

Überprüfen Sie durch einen geeigneten statistischen Test ($\alpha = 0,05$), ob der Kugeldurchmesser durch eine Normalverteilung beschrieben wird!

Aufgabe 2.

Ein Kunde des Kugelherstellers aus Aufgabe 1 stellt eigene Anforderungen an die gelieferten Kugeln. Er nimmt deshalb selbst Stichproben. Für die letzten zehn Lieferungen von Kugeln mit dem Nenndurchmesser $d_N = 5 \text{ mm}$ ergaben sich hierbei folgende Kugeldurchmesser d bzw. die Abweichungen zum Nenndurchmesser $d_A = d - d_N$:

i	Durchmesser d in mm	Durchmesserabweichung $d_A = d - d_N$ in μm
1	4,99997	-0,03
2	5,00023	0,23
3	4,99946	-0,54
4	5,00094	0,94
5	5,00048	0,48
6	4,99900	-1,00
7	5,00030	0,30
8	5,00094	0,94
9	5,00067	0,67
10	5,00074	0,74

- Ermitteln Sie, ob die Forderung des Kunden erfüllt ist, dass der Kugeldurchmesser d der Kugeln für 95% aller Kugeln im Bereich von $d_N \pm 1 \mu\text{m}$ liegt ($1 \mu\text{m} = 0,001 \text{ mm}$).
- Überprüfen Sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob der mittlere Durchmesser signifikant vom Nenndurchmesser d_N abweicht (Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$)!

Hinweis: Es kann in Aufgabe 2 für den Durchmesser eine Normalverteilung angenommen werden.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1, \dots, x_n

3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall

5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2; 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten x_1, \dots, x_n aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x_1, \dots, x_n enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten x_1, \dots, x_n abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
 - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
 - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
 - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1; 1-\alpha}^2$$

Varianzanalyse

Mit der Varianzanalyse kann geprüft werden, ob verschiedene Stichproben zu einer Grundgesamtheit gehören.

- Die Nullhypothese H_0 lautet: Alle Stichproben haben den gleichen Erwartungswert.
- Die Alternativhypothese H_1 lautet: Es gibt mindestens zwei Stichproben a, b mit $\mu_a \neq \mu_b$

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{\text{total}} = SQZ + SQI$$

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

k : Anzahl Stichproben

n_j : Anzahl Wiederholungen innerhalb der Stichproben

$$n = \sum_{j=1}^k n_j : \text{Gesamtanzahl der Messwerte}$$

- Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQI innerhalb der Stichproben:

$$SQI = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

- Berechnung der mittleren Quadratsummen MQI innerhalb der Stichproben:

$$MQI = \frac{SQI}{n - k}$$

Analog zur Berechnung der Streuungen wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekannten Mittelwerten sind das $n - k$ unabhängige Elemente.

- Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQZ zwischen den Stichproben:

$$SQZ = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

mit

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j \bar{x}_j$$

- Berechnung der mittleren Quadratsumme MQZ zwischen den Stichproben:

$$MQZ = \frac{SQZ}{k - 1}$$

Analog zur Berechnung der Streuung wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekanntem Mittelwert sind das $k - 1$ unabhängige Elemente.

- Berechnung der Testgröße:

$$F = \frac{MQZ}{MQI}$$

Die Testgröße F soll bei Zutreffen der Hypothese H_0 einer F -Verteilung genügen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $f_1 = k - 1$ und $f_2 = n - k$.

- Bestimmung der Grenze anhand der F -Verteilung zum Signifikanzniveau α :

$$F_{k-1; n-k; 1-\alpha}$$

Dieser so genannte kritische Wert wird aus Tabellen entnommen.

- H_0 wird abgelehnt sobald gilt:

$$F > F_{k-1; n-k; 1-\alpha}$$

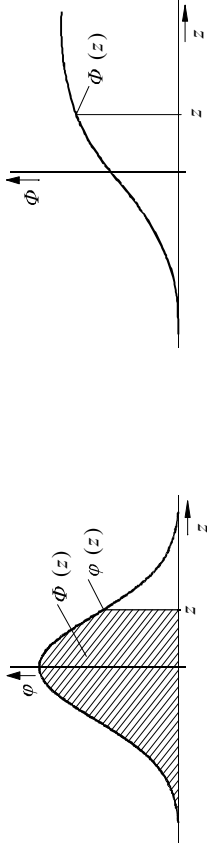
Anderenfalls besteht kein Anlass, H_0 zu verwerfen.

Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,50000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,998 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,95	0,975	0,99	0,995
1		6,31	12,7	31,8	63,7
2		2,92	4,30	6,97	9,93
3		2,35	3,18	4,54	5,84
4		2,13	2,78	3,75	4,60
5		2,02	2,57	3,37	4,03
6		1,94	2,45	3,14	3,71
7		1,90	2,37	3,00	3,50
8		1,86	2,31	2,90	3,36
9		1,83	2,26	2,82	3,25
10		1,81	2,23	2,76	3,17
11		1,80	2,20	2,72	3,11
12		1,78	2,18	2,68	3,06
13		1,77	2,16	2,65	3,01
14		1,76	2,15	2,62	2,98
15		1,75	2,13	2,60	2,95
16		1,75	2,12	2,58	2,92
17		1,74	2,11	2,57	2,90
18		1,73	2,10	2,55	2,88
19		1,73	2,09	2,54	2,86
20		1,73	2,09	2,53	2,85
22		1,72	2,07	2,51	2,82
24		1,71	2,06	2,49	2,80
26		1,71	2,06	2,48	2,78
28		1,70	2,05	2,47	2,76
30		1,70	2,04	2,46	2,75
40		1,68	2,02	2,42	2,70
50		1,68	2,01	2,40	2,68
100		1,66	1,98	2,37	2,63
200		1,65	1,97	2,35	2,60
∞		1,64	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6		10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2