Klausur
Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

24.5.2008

Kurzfragen

1. Welche der folgenden Größen sind keine Grundgrößen des SI-Systems?
   Kraft, Länge, Volumen, elektrische Feldstärke, elektrische Spannung, elektrische Stromstärke, Masse, Temperatur, Druck

2. Aus welchen Elementen besteht eine Messsystem?

3. Nennen Sie je ein Beispiel für eine intensive und extensive Größe!

4. Der Nullpunkt eines Messgerätes wurde neu justiert. Ist das Gerät damit gleichzeitig kalibriert worden?

5. Ein Lichtstärkemessgerät zeige bei einer tatsächlichen Lichtstärke von 0,1 cd den Wert 0,12 cd an. Das Gerät wird kalibriert. Welchen Messwert zeigt es nach der Kalibrierung bei einer tatsächlichen Lichtstärke von 0,1 cd an?

6. Eine Strecke von 400 mm werde 22 mal gemessen. Die Messwerte seien normalverteilt und es wird bei einer statistischen Sicherheit von 99 % ein Vertrauensbereich von $\pm$ 0,52 mm um den Mittelwert ermittelt. Wie viele Messungen müsste man durchführen, um diesen Vertrauensbereich zu halbieren?

7. Nennen Sie einen Vorteil des Medians, gegenüber dem arithmetischen Mittelwert!

8. Wieviele Intervalle sollte man nach der in der Vorlesung angegebenen Faustregel für ein Histogramm mit 105 Messwerten sinnvoll wählen?

Aufgabe 1.

Die Brenndauer einer bestimmten Sorte Glühbirnen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 1200$ Stunden und der Varianz $\sigma^2 = 10000$ Stunden.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Glühbirne eine Brenndauer von mehr als 1100 Stunden besitzt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Brenndauer einer zufällig ausgewählten Glühbirne zwischen 1000 und 1500 Stunden?

Aufgabe 2.

Ein Schiffsmotorenhersteller behauptet, dass seine Maschinen im Durchschnitt höchstens 29,5 Liter Brennstoff pro Betriebsstunde verbrauchen. Eine Stichprobe vom Umfang n = 10 Motoren liefert einen durchschnittlichen Verbrauch von $\overline{x} = 31\,\mathrm{l}$ bei einer Streuung von $s = 3,16\,\mathrm{l}$. Kann damit die Behauptung des Herstellers als widerlegt angesehen werden, wenn man voraussetzt, dass der Brennstoffverbrauch pro Betriebsstunde normalverteilt ist (Signifikanzniveau = 0,05)?

Aufgabe 3.

Drei Mittelklassewagen sollen auf ihren durchschnittlichen Benzinverbrauch hin untersucht werden. Jeder Typ wird von jeweils fünf Testfahrern über eine längere Versuchsstrecke gefahren, wobei sich folgende Verbrauchswerte in Liter/100 km ergeben:

Wagentyp	Fahrer-Nr.				
	1	2	3	4	5
I	12,0	12,5	13,2	11,5	12,5
II	13,3	12,0	12,1	13,2	12,5
III	11,0	11,5	11,3	12,3	10,5

Haben die verschiedenen Wagentypen einen signifikant unterschiedlichen Verbrauch (Signifikanzniveau = 0,05)? Untersuchen Sie dieses mit einem geeigneten Testverfahren.

Elementare statistische Maßzahlen:

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall:

Die Meßgröße *X* sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Meßgröße *X* sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) **Regressionskoeffizient** b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die **Restvarianz** $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j) \right)^2$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit p (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Meßwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit p=1-α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit p in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert $y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$ zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit p=1-α ist:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler:

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für ***f*** mit statistischer Sicherheit *P%=1-α*:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f ; f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}$$

$$c_{x_i} = \frac{t_{n_{x_i} - 1; 1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{x_i}}} s_{x_i}$$

t-Test:

t-Test für Erwartungswert:

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df=n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α.

1.) H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.)H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.) H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte:

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x=n_y=n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}} \quad \textit{(df=2n-2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1.) H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.) H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.) H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

Ist $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben:

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \textit{(df=n-1)}$$

$d_i=x_i-y_i$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen:

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Meßdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Meßwerten x1,...xn aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Meßreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müßte diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

11. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen Ti, so daß jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x1,...xn enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
12. Bestimmen der Anzahl Bi von Meßwerten in der Klasse Ti
13. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Meßdaten x1,...xn abgeschätzt.
14. Berechnen der Wahrscheinlichkeit pi, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Meßwert im Intervall Ti zu erwarten ist.
15. Berechnen der Produkte Ei=npi, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse Ti bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
16. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: Ei $\geq$ 5. Klassen mit Ei < 5 werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit r* $\leq$ r.
17. Berechnen der Testgröße
$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i-E_i\right)^2}{E_i}$$
18. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade
r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl >5)
s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
Die Zahl der Freiheitsgrade ist r*-s-1
19. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn $\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$

Varianzanalyse:

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{total} = SQ_{Behandlung} + SQ_{\mathrm{Re}\,st}$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a} r_i\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$$

a: Anzahl Behandlungen (Gruppen)

r_i: Anzahl Wiederholungen (in Gruppen)

$n=a*r_i$ (vollkommen randomisierte Versuchsanlage)

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \qquad \bar{y}_i = \frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}$$

Mittlere Quadratsummen:

$$MQ_{Behandlung} = \frac{SQ_{Behandlung}}{FG_{Behandlung}} = \frac{SQ_{Behandlung}}{a-1}$$

$$MQ_{\mathrm{Re}\,st} = \frac{SQ_{\mathrm{Re}\,st}}{FG_{\mathrm{Re}\,st}} = \frac{SQ_{\mathrm{Re}\,st}}{n-a}$$

Die Testgröße:

$$F_0 = \frac{MQ_{Behandlung}}{MQ_{\mathrm{Re}\,st}}$$

Kritischer Wert:

$$F_{kritisch} = F_{FG_{Behandlung};FG_{\mathrm{Re}\,st};1-\alpha}$$

Die Entscheidung:

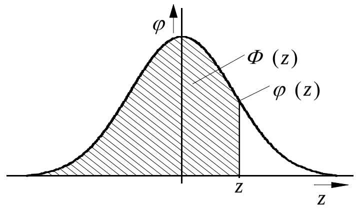
Hypothese H_0 wird angenommen falls $F_0 < F_{kritisch}$

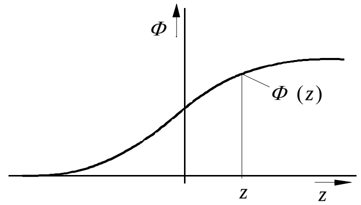
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





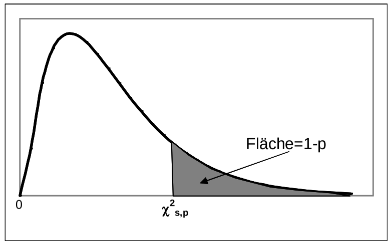
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

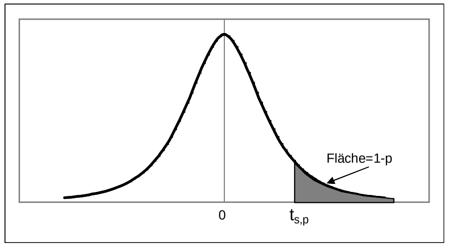
p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 - Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17



p-Quantile $t_{s,p}$ der Student´schen t - Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,950	0,975	0,990	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
80	1,67	1,99	2,38	2,65
100	1,66	1,99	2,37	2,64
200	1,66	1,99	2,37	2,63
∞	1,65	1,96	2,33	2,58



90 %-Quantile $F_{r,s,\,0,9}$ der F - Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	61,22	61,74
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,42	9,44
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,20	5,18
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,87	3,84
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,24	3,21
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,87	2,84
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,63	2,59
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,46	2,42
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,34	2,30
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,24	2,20
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,10	2,06
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,01	1,96
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,94	1,89
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,89	1,84
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,84	1,79
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,72	1,67
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,66	1,61
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,63	1,57
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,56	1,49
∞	2,71	2,30	2,08	1,95	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,49	1,42

95 %-Quantile $F_{r,s,\,0,95}$ der F - Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95	248,01
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68
∞	3,84	3,00	2,61	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57

97,5 %-Quantile $F_{r,s,\,0,975}$ der F - Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28	968,63	984,87	993,10
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,43	39,45
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,25	14,17
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,66	8,56
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,43	6,33
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,27	5,17
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,57	4,47
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,10	4,00
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,77	3,67
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,52	3,42
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,18	3,07
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	2,95	2,84
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,79	2,68
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,67	2,56
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,57	2,46
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,31	2,20
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,18	2,07
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,11	1,99
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	1,97	1,85
∞	5,03	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,83	1,71

99 %-Quantile $F_{r,s,\,0,99}$ der F - Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	4.052,18	4.999,50	5.403,35	5.624,58	5.763,65	5.858,99	5.928,36	5.981,07	6.022,47	6.055,85	6.157,28	6.208,73
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,43	99,45
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	26,87	26,69
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,20	14,02
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,72	9,55
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,56	7,40
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,31	6,16
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,52	5,36
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	4,96	4,81
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,56	4,41
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,01	3,86
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,66	3,51
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,41	3,26
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,23	3,08
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,09	2,94
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,70	2,55
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,52	2,37
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,42	2,27
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,22	2,07
∞	6,64	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,04	1,88