Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $f_0 = f(L, C_0, a_c, T)$ mit P = 98%:

Die gegebenen Gleichungen lauten:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad (1)$$

$$C = C_0 \cdot (1 + a_c \cdot \Delta T) \qquad (2)$$

$$\Delta T = T - T_0 \qquad (3)$$

Einsetzen von (2) in (1) und von (3) in (2), sowie Umrechnung von der Kreisfrequenz ω_0 auf die Frequenz f_0 liefert folgende Bestimmungsgleichung für f_0:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C_0 \cdot (1 + a_c \cdot (T - T_0))}}$$

Der Temperaturkoeffizient von $a_c = -1{,}5 \cdot 10^{-3}$ 1/K kann laut Aufgabenstellung als exakt angenommen werden.

Es verbleiben damit folgende abweichungsbehaftete Einflussgrößen: L, C_0, T

Die gegebene Induktivität L von P = 99% auf P = 98% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit sehr großen n ($n \to \infty$) folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{\infty;0,99} = 2{,}33$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{\infty;0,995} = 2{,}58$$

$$\Rightarrow \quad c_{L;98\%} = 10\,\mu\text{H} \cdot \frac{2{,}33}{2{,}58} \approx 9{,}031\,\mu\text{H}$$

Das vollständige Messergebnis der Induktivität L lautet damit:

$$L = 1000\,\mu\text{H} \pm 9{,}031\,\mu\text{H}\,; \;\; P = 98\%$$

oder in alternativer Darstellung

$$L = 1 \cdot 10^{-3}\,\frac{V \cdot s}{A} \pm 9{,}031 \cdot 10^{-6}\,\frac{V \cdot s}{A}\,; \;\; P = 98\%$$

Das Konfidenzintervall der Kapazität C_0 liegt als prozentuale Angabe bezogen auf den Nennwert vor und muss in einen absoluten Wert umgerechnet werden. Das Konfidenzintervall für P = 98% beträgt 1,25% von Nennwert. Es folgt also:

$$c_{C_0} = 0{,}0125 \cdot 130\ \mu\text{F} = 1{,}625\ \mu\text{F}$$

Das vollständige Messergebnis der Kapazität C_0 lautet damit:

$$C_0 = 130\ \mu\text{F} \pm 1{,}625\ \mu\text{F}\,;\ \ P = 98\%$$

oder in alternativer Darstellung

$$C_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}} \pm 1{,}625 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}}\,;\ \ P = 98\%$$

Berechnung des vollständigen Messergebnisses der Temperatur T aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\overline{T} = 22{,}22\ °\text{C}$

Streuung: $S_T \approx 0{,}95319\ °\text{C}$

Vertrauensbereich: $c_T = \frac{S_T}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 9$

$\alpha = 0{,}02$

folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{8;0,99} = 2{,}9$$

$$\Rightarrow \quad c_T = \frac{0{,}95319\ °\text{C}}{\sqrt{9}} \cdot 2{,}9 \approx 0{,}921\ °\text{C}$$

$$T = 22{,}22\ °\text{C} \pm 0{,}921\ °\text{C}\,;\ \ P = 98\%$$

Der Temperaturkoeffizient a_c ist in der Einheit 1/K angegeben, während die Temperatur sowie die Referenztemperatur in °C gemessen werden. Da hier jedoch keine absoluten Temperaturen betrachtet werden, sondern lediglich Temperaturdifferenzen, können die Einheiten K und °C aufgrund der identischen Intervallbreite der Skalen ohne weitere Berechnungen gegeneinander ausgetauscht werden. Für den Temperaturkoeffizient a_c kann also auch geschrieben werden:

$$a_c = -1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{°\text{C}}$$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{f_0}$:

$$\overline{f_0} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\overline{L} \cdot \overline{C_0} \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(\overline{T} - T_0\right)\right)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{1 \cdot 10^{-3}\ \frac{V \cdot s}{A} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-4}\ \frac{A \cdot s}{V} \cdot \left(1 - 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{°C} \cdot \left(22{,}22\ °C - 20\ °C\right)\right)}}$$

$$= 442{,}153\ \frac{1}{s} = 442{,}153\ \mathrm{Hz}$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial f_0}{\partial L}\right|_{\overline{L},\overline{C_0},\overline{T}} = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(L \cdot C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(T - T_0\right)\right)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(T - T_0\right)\right) \approx -221076{,}59\ \frac{A}{V \cdot s^2}$$

$$\left.\frac{\partial f_0}{\partial C_0}\right|_{\overline{L},\overline{C_0},\overline{T}} = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(L \cdot C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(T - T_0\right)\right)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot L \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(T - T_0\right)\right) \approx -1700589{,}19\ \frac{V}{A \cdot s^2}$$

$$\left.\frac{\partial f_0}{\partial T}\right|_{\overline{L},\overline{C_0},\overline{T}} = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left(L \cdot C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot \left(T - T_0\right)\right)\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot L \cdot C_0 \cdot a_c \approx 0{,}332723\ \frac{1}{°C \cdot s}$$

Vertrauensbereich c_{f_0}:

$$c_{f_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_0}{\partial L} \cdot c_L\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial C_0} \cdot c_{C_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_0}{\partial T} \cdot c_T\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_{f_0} = \sqrt{\left(-221076{,}59 \cdot 9{,}031 \cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(-1700589{,}19 \cdot 1{,}625 \cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(0{,}332723 \cdot 0{,}921\right)^2}\ \frac{1}{s}$$

$$c_{f_0} \approx 3{,}423\ \frac{1}{s} = 3{,}423\ \mathrm{Hz}$$

Vollständiges Messergebnis für die Frequenz f_0:

$$f_0 = 442{,}153\ \mathrm{Hz} \pm 3{,}423\ \mathrm{Hz}; \quad P = 98\%$$

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Konfidenzintervall:

Mittelwert: $\overline{\Delta f} = -85{,}5\ \text{Hz}$

Streuung: $s_{\Delta f} \approx 326{,}552\ \text{Hz}$

$$c_{\Delta f} = \frac{s_{\Delta f}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 10$
$\alpha = 0{,}02$

$\Rightarrow$ $t_{9;0,99} = 2{,}82$

$$c_{\Delta f} = \frac{326{,}552\ \text{Hz}}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}82 \approx 291{,}207\ \text{Hz}$$

$$\Delta f = -85{,}5\ \text{Hz} \pm 291{,}207\ \text{Hz};\ \ P = 98\%$$

b) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich des Erwartungswertes μ_f mit dem Nennwert von $f = 20$ MHz

Da als Messwerte nicht die absoluten Frequenzen f sondern die Abweichungen vom Nennwert vorliegen, ist es zweckmäßig, die geforderte Überprüfung direkt anhand dieser Differenzen vorzunehmen. Obige Forderung, dass die Frequenz nicht signifikant vom Nennwert $f = 20$ MHz abweicht, ist identisch mit der Forderung, dass die Differenz Δf nicht signifikant von Null abweicht. Es wird also überprüft, ob gilt $\mu_{\Delta f} = 0$.

- Es sollen der anhand einer Messreihe abgeschätzte Erwartungswert mit einem vorgegebenen Referenzwert verglichen werden.

$\Rightarrow$ t-Test für Erwartungswert

- Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert der gefertigten Oszillatoren vom Referenzwert abweicht oder mit diesem identisch ist! Das Vorzeichen einer etwaigen Abweichung ist hingegen nicht von Interesse.

$\Rightarrow$ zweiseitige Hypothese

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

$\Rightarrow$ $H_0:\ \mu_x = \mu_0 \ \hat{=}\ $ es gibt keinen signifikanten Unterschied gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0 \quad \hat{=} \quad$ der Erwartungswert weicht vom Referenzwert ab

Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

mit

$$n = 10$$

$$\overline{x} = \overline{\Delta f} = -85{,}5 \text{ Hz}$$

$$\mu_0 = 0 \text{ Hz}$$

$$s_x = s_{\Delta f} \approx 326{,}552 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow \qquad t_0 = \frac{-85{,}5 \text{ Hz} - 0 \text{ Hz}}{\frac{326{,}552 \text{ Hz}}{\sqrt{10}}} \approx -0{,}828$$

Vergleichswert: $\quad t_{n-1;1-\alpha/2} \quad$ mit: $\quad n = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$\Rightarrow \qquad t_{9;0,975} = 2{,}26$

Test: $\quad |t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$

hier: $\quad |-0{,}828| > 2{,}26 \quad \lightning$

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ stimmt der Erwartungswert der Frequenz f der gefertigten Oszillatoren mit dem Nennwert von $f_{nenn} = 20$ MHz überein!

c) Liegen maximal 2% der Oszillatoren außerhalb des geforderten Intervalls?

Es erfüllen nur Oszillatoren die Spezifikation, bei denen die Frequenz f um nicht mehr als ±40 ppm des Nennwerts von diesem abweicht. Mit einem Nennwert von $f_{nenn} = 20$ MHz folgt für die maximale Abweichung Δf:

$$\Delta f = 40 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{6} \text{ Hz} = 800 \text{ Hz}$$

Das Intervall symmetrisch um den Nennwert, innerhalb dessen die Frequenzen liegen sollen lautet damit:

$$[19.999.200 \text{ Hz} ; 20.000.800 \text{ Hz}]$$

Ebenso wie unter Aufgabenteil b) ist es jedoch zweckmäßig, hier nicht mit den absoluten Frequenzen sondern mit den Frequenzabweichungen zu rechnen. Das Intervall symmetrisch um den Wert Null, innerhalb dessen die Frequenzabweichungen liegen sollen lautet damit:

$$[-800\text{ Hz}\,;800\text{ Hz}]$$

Da maximal 2% aller gefertigten Oszillatoren außerhalb dieses Intervalls liegen dürfen, müssen zur Erfüllung der Spezifikation also mindestens 98% innerhalb des oben berechneten Intervalls liegen.

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

Als Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung dienen Mittelwert und Streuung der Stichprobe wie unter a) berechnet:

Mittelwert: $\overline{\Delta f} = -85{,}5\text{ Hz}$

Streuung: $s_{\Delta f} \approx 326{,}552\text{ Hz}$

hier: $$z_{max} = \frac{800\text{ Hz} - (-85{,}5\text{ Hz})}{326{,}552\text{ Hz}} \approx 2{,}71$$

$$z_{min} = \frac{-800\text{ Hz} - (-85{,}5\text{ Hz})}{326{,}552\text{ Hz}} \approx -2{,}19$$

$\Phi(z_{max} = 2{,}71) = 0{,}996636$ (aus Tabelle)

$\Phi(z_{min} = -2{,}19) = 1 - \Phi(-z_{min} = 2{,}19) = 1 - 0{,}985738 = 0{,}014262$ (aus Tabelle)

Innerhalb des Intervalls $[z_{min}; z_{max}]$ liegen folglich:

$$\Phi(z_{max}) - \Phi(z_{min}) = 0{,}996636 - 0{,}014262 \approx 0{,}982374 \approx 98{,}24\%$$

Insgesamt liegt bei ca. 98,24% der produzierten Oszillatoren die Frequenz im geforderten Intervall. Folglich liegt bei 1,76% der Oszillatoren die Frequenz außerhalb des geforderten Intervalls. Die Spezifikation wird von den Oszillatoren somit erfüllt!

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung der Abhängigkeit der Frequenz f eines Schwingkreises von der Temperatur T für $\alpha = 0{,}01$:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Hier gegeben:

$$f = f_0 \cdot (1 + a_f \cdot \Delta T)$$

Umstellen der Gleichung liefert:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = a_f \cdot \Delta T$$

Die Temperaturdifferenz ΔT ist in der Aufgabenstellung nicht direkt angegeben, sondern muss aus den gemessenen Temperaturen T und der gegebenen Referenztemperatur T_0 berechnet werden:

$$\frac{f - f_0}{f_0} = a_f \cdot (T - T_0)$$

Mit $a_f \equiv b$ gilt weiterhin:

$$T - T_0 \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad \frac{f - f_0}{f_0} \mathrel{\hat{=}} y$$

Ferner gilt laut Aufgabenstellung:

$f_0 = 440$ Hz, $T_0 = 20$ °C

x-y-Wertepaare bestimmen:

x / °C	y / 1
-6	–0,002159
-4	–0,001273
-2	–0,000636
0	–0,000159
2	0,000614
4	0,001432
6	0,001909
8	0,002750

Mittelwerte:

$$\overline{x} = 1\,°C$$

$$\overline{y} \approx 0{,}00030966 = 3{,}0966 \cdot 10^{-4}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b \approx 0{,}00034077 \, \frac{1}{°C} = 3{,}4077 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{°C}$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 1{,}152 \cdot 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 1{,}0734 \cdot 10^{-4}$$

Vertrauensbereich c_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 8$$

$$\alpha = 0{,}01$$

$t_{6;0,995} = 3{,}71$ (siehe Tabelle)

$$s_x \approx 4{,}899\,°C$$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 2{,}874 \cdot 10^{-5} \, \frac{1}{°C}$$

Ergebnis:

$$b \approx 3{,}4077 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{°C} \pm 2{,}874 \cdot 10^{-5} \, \frac{1}{°C} \quad ; \alpha = 0{,}01$$

b) Bestimmung der Frequenz f für $T^* = 25\,°C$ bei α = 0,05:

gegeben:

$$x^* = T^* - T_0 = 5\,°C$$

$$\Rightarrow \qquad y^* = 3{,}0966 \cdot 10^{-4} + 3{,}4077 \cdot 10^{-4} \, \frac{1}{°C} \cdot (5\,°C - 1\,°C) \approx 1{,}673 \cdot 10^{-3}$$

Vertrauensbereich für y^*:

$$c_{y*} = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}} \qquad \text{mit:} \quad n = 8$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$t_{6;0,975} = 2{,}45$ (siehe Tabelle)

$$\Rightarrow \quad c_{y*} \approx 1{,}2003 \cdot 10^{-4}$$

Umrechnen in die gesuchte Frequenz f mit:

$$y = \frac{f - f_0}{f_0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad f = f_0 \cdot (1 + y) \qquad ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_0 \qquad ; \qquad c_{f*} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot c_{y*}\right)^2}$$

Ergebnis:

$$f = 440{,}7361\,\text{Hz} \pm 0{,}0528\,\text{Hz} \;\; ; \;\; \alpha = 0{,}05$$

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Größen handelt!**

   Masse, Temperatur, Dichte, Energie, Brechungsindex, Stoffmenge, Druck, Impuls, Geschwindigkeit, Entropie

   Temperatur, Dichte, Brechungsindex, Druck, Geschwindigkeit

2. **Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welches der folgenden Resultate erwarten Sie?**

   - **Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht.**
   - **Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn.**
   - **Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei.**

   Begründen Sie Ihre Antwort!

   Der Wägewert für Blei ist höher. Der Wägewert enthält noch den Einfluss des Auftriebs in Luft. Da die Federn eine geringere Dichte – und somit ein größeres Volumen – aufweisen als das Blei, erfahren Sie einen größeren Auftrieb, wodurch sich der Wägewert verringert.

3. **Ordnen Sie die nachfolgenden Skalenniveaus aufsteigend nach ihrem Informationsgehalt!**

   Kardinalskala, Nominalskala, Ordinalskala

   Nominalskala, Ordinalskala, Kardinalskala

4. **Zur Untersuchung des statistischen Verhaltens einer Messgröße soll ein Histogramm mit 12 Klassen erstellt werden. Wie viele Wiederholungen der Messung sind dafür gemäß der Faustformel aus der Vorlesung erforderlich?**

   144

5. **Bei der Beobachtung eines Zufallsprozesses stellen Sie fest, dass zwischen dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ der Zusammenhang $\sigma = \sqrt{\mu}$ besteht. Um welche Art von Verteilungsfunktion handelt es sich.**

   Poissonverteilung

6. **Welcher Punkt liegt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden?**

   Der Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der zugrunde liegenden Punkte.

7. **Welche Form weist die Verteilungsdichte für die Zahlen 1 bis 6 bei einem idealen Würfel auf?**

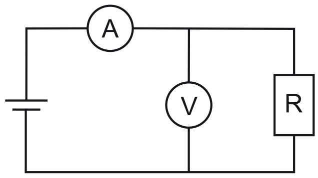
   Rechteckverteilung bzw. Gleichverteilung

8. Wie viele Takte benötigt ein A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren maximal für die Digitalisierung einer Messgröße mit 12 Bit Auflösung?

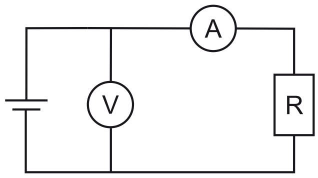
$2^{12} = 4096$

9. Für die indirekten Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich. Benennen und skizzieren Sie diese! Geben Sie weiterhin an, welche davon für die Messung großer Widerstände geeigneter ist!

Stromfehlerschaltung:



Spannungsfehlerschaltung:



Die Spannungsfehlerschaltung ist geeigneter zur Messung großer Widerstände.

10. Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen -10 V und +10 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 50 kHz soll so digitalisiert werden, dass

i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 20 µV beträgt.

Geben Sie an,
a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um eine Minute des Signals darzustellen!

zu a) Die Abtastfrequenz muss mindestens $f_{Abtast} = 2 \cdot f_{max}$ = 100 kHz betragen.

zu b) Die Spannungsauflösung muss mindestens 40 µV betragen, damit die maximale Quantisierungsabweichung 20 µV beträgt. Bei einem Spannungsbereich von 20 V sind dies 500.000 Stufen. Daher ist eine Digitalauflösung sind mindestens 19 Bit (2^{19} = 524.288) erforderlich.

zu c) Um 1 Minute = 60 Sekunden mit einer Frequenz von 100 kHz und einer Digitalauflösung von 19 Bit darstellen zu können, sind mindestens $60 \cdot 19/8 \cdot 100.000$ = 14.250.000 Byte erforderlich.