Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $\rho = f(m_{Glas}, m_{Blei}, d, h)$ mit P = 95%:

Die gegebene Gleichung lautet:

$$\rho = \frac{m_{Glas} + m_{Blei}}{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h}$$

Da die Messung der Massen m_{Glas} und m_{Blei} gemeinsam erfolgt, ist es sinnvoll, statt der Einzelmassen nur die Gesamtmasse zu betrachten. Mit $m_{ges} = m_{Glas} + m_{Blei}$ lautet obige Gleichung:

$$\rho = \frac{m_{ges}}{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h}$$

Abweichungsbehaftete Einflussgrößen: m_{ges}, d, h

Die Massen m_{Glas} und m_{Blei} werden in einer gemeinsamen Messung erfasst. Der Messwert beträgt $m_{Glas} + m_{Blei} = m_{ges} = 10$ g. Die zugehörige Unsicherheit muss errechnet werden aus der allgemeinen Angabe:

$$u_m = (0{,}05 \text{ g} + 0{,}1 \text{ g/kg} \cdot M)$$

Hierin steht M für den Messwert der Masse, im vorliegenden Fall also $M = m_{ges} = 10$ g. Bei der Berechnung der Unsicherheit ist besonders auf die Einheiten zu achten (g und kg in einer Gleichung). Am einfachsten ist es im vorliegenden Fall, die gemessene Masse in der Einheit Kilogramm einzusetzen:

$$u_m = (0{,}02 \text{ g} + 0{,}1 \text{ g/kg} \cdot 0{,}01 \text{ kg}) = 0{,}021 \text{ g}$$

Diese Unsicherheitsangabe bezieht sich bereits auf die benötigte Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95%. Das vollständige Messergebnis der Masse m_{ges} lautet somit:

$$m_{ges} = 10 \text{ g} \pm 0{,}021 \text{ g}\,; \;\; P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$m_{ges} = 0{,}01 \text{ kg} \pm 2{,}1 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\,; \;\; P = 95\%$$

Den gegebenen Durchmesser d von P = 98% auf P = 95% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit n = 25 folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{24;0,975} = 2{,}06$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{24;0,99} = 2{,}49$$

$$\Rightarrow \quad c_{d;95\%} = 0{,}006\ \text{mm} \cdot \frac{2{,}06}{2{,}49} \approx 0{,}004964\ \text{mm}$$

$$d = 12\ \text{mm} \pm 0{,}004964\ \text{mm}\,;\ \ P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$d = 0{,}012\ \text{m} \pm 4{,}964 \cdot 10^{-6}\ \text{m}\,;\ \ P = 95\%$$

Berechnung des vollständigen Messergebnisses der Eintauchtiefe h aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\bar{h} = 111{,}9\ \text{mm}$

Streuung: $S_h \approx 0{,}2619\ \text{mm}$

Vertrauensbereich: $c_h = \dfrac{S_h}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}05$

folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{7;0,975} = 2{,}36$$

$$\Rightarrow \quad c_h = \frac{0{,}2619\ \text{mm}}{\sqrt{8}} \cdot 2{,}36 \approx 0{,}2185\ \text{mm}$$

$$h = 111{,}9\ \text{mm} \pm 0{,}2185\ \text{mm}\,;\ \ P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$h = 0{,}1119\ \text{m} \pm 2{,}185 \cdot 10^{-4}\ \text{m}\,;\ \ P = 95\%$$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{\rho}$:

$$\rho = \frac{\overline{m}_{ges}}{\frac{1}{4}\pi \cdot \overline{d}^2 \cdot \overline{h}} = \frac{0{,}01\,\text{kg}}{\frac{1}{4}\pi \cdot (0{,}012\,\text{m})^2 \cdot 0{,}1119\,\text{m}} \approx 790{,}165\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial m_{ges}}\right|_{\overline{m}_{ges},\overline{d},\overline{h}} = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi \cdot \overline{d}^2 \cdot \overline{h}} \approx 79016{,}455\,\frac{1}{\text{m}^3}$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial d}\right|_{\overline{m}_{ges},\overline{d},\overline{h}} = -2 \cdot \frac{\overline{m}_{ges}}{\frac{1}{4}\pi \cdot \overline{d}^3 \cdot \overline{h}} \approx -131694{,}091\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial h}\right|_{\overline{m}_{ges},\overline{d},\overline{h}} = -\frac{\overline{m}_{ges}}{\frac{1}{4}\pi \cdot \overline{d}^2 \cdot \overline{h}^2} \approx -7061{,}345\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

Vertrauensbereich c_ρ:

$$c_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m_{ges}} \cdot c_{m_{ges}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial d} \cdot c_d\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \cdot c_h\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_\rho = \sqrt{\left(79016{,}455 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \left(-131694{,}91 \cdot 4{,}964 \cdot 10^{-6}\right)^2 + \left(-7061{,}345 \cdot 2{,}185 \cdot 10^{-4}\right)^2}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c_\rho \approx 2{,}358\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Vollständiges Messergebnis für die Dichte ρ:

$$\rho = 790{,}165\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pm 2{,}358\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad P = 95\%$$

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Konfidenzintervall:

Mittelwert: $\overline{m} = 21{,}05\ \text{g}$

Streuung: $s_m \approx 0{,}08896\ \text{g}$

$$c_m = \frac{s_m}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 8$
$\alpha = 0{,}02$

$\Rightarrow \quad t_{7;0,99} = 3{,}0$

$$c_m = \frac{0{,}08896\ \text{g}}{\sqrt{8}} \cdot 3{,}0 \approx 0{,}09436\ \text{g}$$

$$m = 21{,}05\ \text{g} \pm 0{,}09436\ \text{g};\ \ P = 98\%$$

b) Stichprobenumfang für Vertrauensbereich von weniger als ±5 µm.

Das Konfidenzintervall bei bekanntem σ lautet:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Gesucht wird der minimale Stichprobenumfang n, für den gilt:

$$\frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \overset{!}{\leq} 0{,}04\ \text{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \overset{!}{\geq} \left(\frac{k \cdot \sigma}{0{,}04\ \text{g}}\right)^2$$

gegeben: $\sigma_m = 0{,}1\ \text{g}$

$$k(\alpha = 0{,}01) = t_{\infty;0,995} = 2{,}58$$

$\Rightarrow \quad n \geq 41{,}6025$

Um die Unsicherheit auf $c_m \leq 0{,}04\ \text{g}$ abschätzen zu können, ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 42 erforderlich!

c) Liegen maximal 3% der Massen außerhalb des geforderten Intervalls?

Es erfüllen nur solche Aräometer die Spezifikation, bei denen die Masse m um nicht mehr als ±1% des Nennwerts von diesem abweicht. Mit einem Nennwert von m_{nenn} = 21 g folgt für die maximale Abweichung Δm:

$$\Delta m = 0{,}01 \cdot 21 \text{ g} = 0{,}21 \text{ g}$$

Das Intervall symmetrisch um den Nennwert, innerhalb dessen die Massen liegen sollen lautet damit:

$$[20{,}79 \text{ g} ; 21{,}21 \text{ g}]$$

Da maximal 3% aller gefertigten Aräometer außerhalb dieses Intervalls liegen dürfen, müssen zur Erfüllung der Spezifikation also mindestens 97% innerhalb des oben berechneten Intervalls liegen.

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Als Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung dienen Mittelwert und Streuung der Stichprobe wie unter a) berechnet:

Mittelwert: $\overline{m} = 21{,}05 \text{ g}$

Streuung: $s_m \approx 0{,}08896 \text{ g}$

hier: $$z_{max} = \frac{21{,}21 \text{ g} - 21{,}05 \text{ g}}{0{,}08896 \text{ g}} \approx 1{,}80$$

$$z_{min} = \frac{20{,}79 \text{ g} - 21{,}05 \text{ g}}{0{,}08896 \text{ g}} \approx -2{,}92$$

$$\Phi(z_{max} = 1{,}80) = 0{,}964070 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

$$\Phi(z_{min} = -2{,}92) = 1 - \Phi(-z_{min} = 2{,}92) = 1 - 0{,}998250 = 0{,}00175 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Innerhalb des Intervalls [z_{min}; z_{max}] liegen folglich:

$$\Phi(z_{max}) - \Phi(z_{min}) = 0{,}964070 - 0{,}00175 \approx 0{,}96232 \approx 96{,}23\%$$

Insgesamt liegt nur bei ca. 96,23% der produzierten Aräometer die Masse im geforderten Intervall. Folglich liegt bei 3,77% der Aräometer die Masse außerhalb des geforderten Intervalls. Die Forderung des Abnehmers wird von den Aräometern somit nicht erfüllt!

d) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich der Erwartungswerte μ_{mA} und μ_{mB} anhand der Stichproben aus den beiden Fertigungslinien A und B

- Es sollen zwei anhand experimentell ermittelter Daten abgeschätzte Erwartungswerte miteinander verglichen werden. Da die beiden Fertigungslinien A und B unabhängig voneinander arbeiten, gibt es keinen Grund zu der Annahme, dass die beiden Stichproben verbunden sein könnten.

$\Rightarrow$ t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

- Es soll überprüft werden, ob die Erwartungswerte auf den beiden Fertigungslinien A und B **identisch sind**! Die Alternative hierzu ist, dass sie **sich unterscheiden**. Ob einer der Werte größer oder kleiner als der andere ist, ist hingegen nicht von Interesse.

$\Rightarrow$ zweiseitige Hypothese

- Im Vorfeld des Tests der zweiseitigen Hypothese wird eine Zuordnung der Variablen x und y zu den Messgrößen m_A und m_B vorgenommen:

  $x \mathrel{\hat{=}} m_A$ (Fertigungslinie A)

  $y \mathrel{\hat{=}} m_B$ (Fertigungslinie B)

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

$\Rightarrow$ $H_0: \mu_x = \mu_y$ $\mathrel{\hat{=}}$ es gibt keinen signifikanten Unterschied

gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ $\mathrel{\hat{=}}$ die Erwartungswerte der Massen unterscheiden sich

Testgröße:

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}}$$

mit

$$n_x = n_y = n = 8$$

$$\overline{x} = \overline{m}_A \approx 21{,}05\ \text{g}$$

$$\overline{y} = \overline{m}_B \approx 20{,}97875\ \text{g}$$

$$s_x = s_{m_A} \approx 0{,}088962\ \text{g}$$

$$s_y = s_{m_B} \approx 0{,}090938\ \text{g}$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{8}\,\frac{21{,}05\ \text{g} - 20{,}97875\ \text{g}}{\sqrt{(0{,}088962\ \text{g})^2 + (0{,}090938\ \text{g})^2}} \approx 1{,}58$$

Vergleichswert: $t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$ mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}01$

$\Rightarrow$ $t_{14;0,995} = 2{,}98$

Test: $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$

hier: $|1{,}58| > 2{,}98$ $\lightning$

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ sind die Erwartungswerte der Massen der auf den Fertigungslinien A und B gefertigten Aräometer identisch!

e) Test auf Poissonverteilung

Als Nullhypothese wird beim χ_0^2-Test formuliert, dass die beobachtete Verteilung einer Poissonverteilung genügt. Die Nullhypothese ist abzulehnen, wenn gilt:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

Die Testgröße χ_0^2 ist in der Aufgabenstellung vorgegeben mit $\chi_0^2 = 16{,}1$. Gesucht wird also der kritische Wert $\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$. Dieser ist von den Parametern r^*, s und α abhängig.

- Die Zahl der auswertbaren Klassen beträgt $r^* = 8$.
- Die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion beträgt $s = 1$ (λ).
- Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0{,}01$.

Es gilt hier also:

$$\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha} = \chi^2_{8-1-1;1-0,01} = \chi^2_{6;0,99}$$

$$\chi^2_{6;0,99} = 16{,}8 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Die auszuwertende Testbedingung lautet somit:

$$16{,}1 > 16{,}8 \quad \lightning$$

Die Testbedingung ist **nicht** erfüllt.

Die Nullhypothese wird daher auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ nicht abgelehnt.

Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ kann davon ausgegangen werden, dass die beobachtete Verteilung einer Poissonverteilung genügt.

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung des Abhängigkeit der Dichte ρ einer wässrigen Zuckerlösung von der Zuckerkonzentration β_Z für $\alpha = 0,1$:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Gesucht ist die Abhängigkeit der Dichte ρ von der Zuckerkonzentration β_Z. Die unabhängige Variable ist im vorliegenden Fall somit die Zuckerkonzentration β_Z, die abhängige Variable ist die Dichte ρ. Für die Zuordnung von x- und y-Größe gilt daher:

$$\beta_Z \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad \rho \mathrel{\hat{=}} y$$

x-y-Wertepaare bestimmen:

$x\,/\,1$	$y\,/\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$
0,05	1018
0,10	1038
0,15	1059
0,20	1081
0,25	1104
0,30	1127
0,35	1151
0,40	1177

Mittelwerte:

$$\overline{x} = 0,225$$

$$\overline{y} = 1094,375\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b \approx 453,57143\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 5{,}089286\,\frac{kg^2}{m^6}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 2{,}2559\,\frac{kg}{m^3}$$

Vertrauensbereich u_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma}\cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}\cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 8$$

$$\alpha = 0{,}1$$

$t_{6;0,95} = 1{,}94$ (siehe Tabelle)

$s_x \approx 0{,}12247$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 12{,}634\,\frac{kg}{m^3}$$

Ergebnis:

$$b \approx 453{,}571\,\frac{kg}{m^3} \pm 12{,}634\,\frac{kg}{m^3} \quad ; \alpha = 0{,}1$$

b) Bestimmung der Dichte ρ für $\boldsymbol{\beta_Z^* = 27{,}5\%}$ bei $\boldsymbol{\alpha = 0{,}01}$:

gegeben:

$$\beta_Z^* = x^* = 27{,}5\% = 0{,}275$$

$$\Rightarrow \qquad y^* = 1094{,}375\,\frac{kg}{m^3} + 453{,}571\,\frac{kg}{m^3}\cdot(0{,}275 - 0{,}225) \approx 1117{,}054\,\frac{kg}{m^3}$$

Vertrauensbereich für y^*:

$$c_{y*} = \frac{\hat{\sigma}\cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1+\frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}} \qquad \text{mit:} \quad n = 8$$

$$\alpha = 0{,}02$$

$t_{6;0,99} = 3{,}14$ (siehe Tabelle)

$$\Rightarrow \quad c_{y*} \approx 2{,}705\,\frac{kg}{m^3}$$

Ergebnis:

$$\rho = 1117{,}054\,\frac{kg}{m^3} \pm 2{,}705\,\frac{kg}{m^3} \;;\; \alpha = 0{,}02$$

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Geben Sie an, welche der folgenden Größen keine Grundgrößen des SI-Systems sind! Kraft, Länge, Volumen, elektrische Spannung, elektrische Stromstärke, Masse, Stoffmenge, Temperatur, Druck**

   Kraft, Volumen, elektrische Spannung, Druck

2. **Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zwischen dem ersten (Q1) und dem vierten Quintil (Q4) liegen!**

   60%

3. **Geben Sie an, wie groß die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion einer Poissonverteilung $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ mit dem Parameter $\lambda=3$ ist!**

   1 (entsprechend 100% wie bei allen anderen Verteilungen auch)

4. **Geben Sie an, ob die folgende Aussage richtig ist! „Die Verteilungsdichte für die Zahlen 1 bis 6 nimmt bei einem idealen Würfel die Form einer Binomialverteilung an."**

   Nein

5. **Geben Sie an, welche beiden Arten von Fehlentscheidungen bei statistischen Tests auftreten können und erläutern Sie diese!**

   Fehlentscheidung 1. Art: Ablehnung von H_0, obwohl H_0 richtig ist.

   Fehlentscheidung 2. Art: Nichtablehnung von H_0, obwohl H_0 falsch ist.

6. **Eine elektronische Waage verfüge über eine Digitalanzeige. Diese zeigt drei Stellen ohne Komma an. Die Einheit ist Gramm.**

   a) Wie groß ist der maximal mögliche Messbereich?
   b) Wie groß ist die höchstmögliche Auflösung?
   c) Wie groß ist der maximal mögliche Parallaxenfehler?

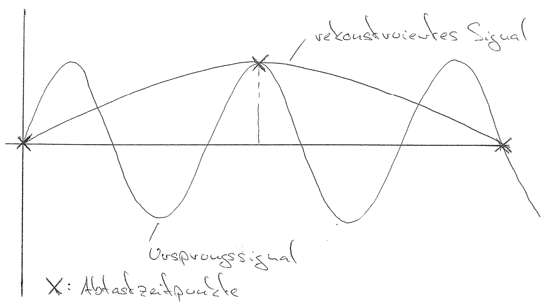
   zu a) 0 g – 999 g

   zu b) 1 g

   zu c) 0 g (bei Digitalanzeige kein Parallaxenfehler möglich)

7. **Formulieren Sie das Abtasttheorem nach Shannon! Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!**

   Wird ein bandbegrenztes Signal mit einer äquidistanten Folge von Stützstellen abgetastet, so ist die Rekonstruktion des Signals ohne Informationsverlust möglich, wenn die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der maximalen Signalfrequenz ist.



8. **Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen 0 V und +24 V mit einer maximalen Signalfrequenz von fmax = 30 kHz soll so digitalisiert werden, dass**

   i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
   ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 15 µV beträgt.

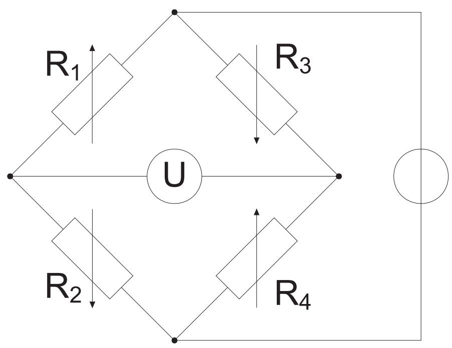
   Geben Sie an,
   a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
   b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
   c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um eine Minute des Signals darzustellen!

   zu a) > 60 kHz

   zu b) 20 Bit

   zu c) 9.000.000 Byte

9. **Skizzieren Sie eine Wheatstone-Brückenschaltung in Vollbrückenbeschaltung einschließlich Spannungsversorgung und Abgriff der Messspannung! Geben Sie an, bei welcher qualitativen Änderung der Widerstände die maximale Änderung der Messspannung zu erwarten ist!**



In einer Vollbrücke ist die Änderung der Messspannung maximal, wenn die Änderungen angrenzender Widerstände entgegen gesetzte Vorzeichen haben (siehe Pfeile in obiger Darstellung).