Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

29. August 2011

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ______________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle zugelassen. Schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 7 bis 10 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

elektr. Kapazität: $1\ \text{F} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{A·s/V} = 1\ \text{A}^2\text{·s}^4/(\text{kg·m}^2)$

Induktivität: $1\ \text{H} = 1\ \text{Wb/A} = 1\ \text{V·s/A} = 1\ \text{kg·m}^2/(\text{A}^2\text{·s}^2)$

parts per million (ppm): $1\ \text{ppm} = 10^{-6} = 0{,}000001$

Kreisfrequenz ω: $\omega = 2\pi \cdot f$

1. Aufgabe:

Zur Tonerzeugung in einem elektronischen Gerät soll ein elektrischer LC-Parallelschwingkreis zum Einsatz kommen. Wie in Abbildung 1.1 dargestellt, besteht ein solcher Schwingkreis aus der Parallelschaltung einer Induktivität L und einer Kapazität C.

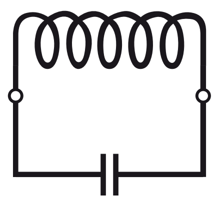


Abbildung 1.1: LC-Parallelschwingkreis

Die Kreisfrequenz ω_0 eines solchen Schwingkreises, bei welcher dieser die geringste Dämpfung aufweist, berechnet sich in Abhängigkeit von L und C gemäß folgender Formel:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Die durch einen Kondensator realisierte Kapazität C zeigt zudem eine nicht zu vernachlässigende Abhängigkeit von der Umgebungstemperatur T, die durch nachfolgenden Zusammenhang gegeben ist:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot \Delta T\right)$$

Hierin ist C_0 die auf eine Temperatur von 20°C bezogene Nennkapazität des Kondensators. Die Temperaturempfindlichkeit wird durch den Faktor a_c angegeben. Die Temperaturdifferenz ΔT ergibt sich aus der herrschenden Umgebungstemperatur T und der Bezugstemperatur T_0 gemäß:

$$\Delta T = T - T_0$$

Im Folgenden soll die Frequenz f_0 des Schwingkreises auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen L, C_0, a_c und T einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Induktivität L der Spule weist laut Datenblatt einen Wert von $L = 1000\ \mu H \pm 10\ \mu H$ bei $P = 99\%$ und sehr großen n auf.

Für den Kondensator wird bei $T_0 = 20°C$ ein Nennwert von $C_0 = 130\ \mu F$ angegeben. Der zugehörige Vertrauensbereich wird vom Hersteller mit ±1,25% vom Nennwert bei $P = 98\%$ und sehr großen n angegeben.

Der Temperaturkoeffizient a_c des Kondensators beträgt $-1{,}5 \cdot 10^{-3}$ 1/K und kann im Weiteren als exakt angenommen werden.

Die Umgebungstemperatur T wird in insgesamt $n = 9$ Wiederholungen gemessen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
T / °C	22,55	22,04	21,38	23,10	21,90	21,48	22,76	23,91	20,86

Tabelle 1.1: Messwerte der Umgebungstemperatur T

a) Berechnen Sie die gesuchte Frequenz f_0 des Schwingkreises und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\ \%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

In zahlreichen elektronischen Geräten – z.B. Prozessoren und Uhren – werden Schwingkreise zur Bereitstellung eines Taktes benötigt. Aufgrund ihrer hohen Präzision kommen hier üblicherweise Quarzoszillatoren zum Einsatz, welche typischerweise Abweichungen von unter 100 ppm (parts per million) aufweisen.

Ein Hersteller von Quarzoszillatoren muss gegenüber seinem Abnehmer nachweisen, dass die von ihm gelieferten Oszillatoren den vereinbarten Spezifikationen entsprechen. Hierzu entnimmt dieser aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ und ermittelt jeweils die Frequenz f der von den Oszillatoren bereitgestellten Schwingung. Dabei wird als Messergebnis protokolliert, welchen Frequenzunterschied Δf die Oszillatoren gegenüber dem Nennwert von $f_{nenn} = 20$ MHz aufweisen. Die Stichprobe führt zu den in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δf / Hz	214	450	-59	-399	-191	-348	-2	326	-431	-415

Tabelle 2.1: Messwerte der Frequenzabweichung Δf aus entnommenen Stichproben

a) Bestimmen Sie ausgehend von obiger Messreihe das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Frequenzabweichung Δf der Oszillatoren auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

b) Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe mittels eines statistischen Tests, ob der Erwartungswert der Frequenz f der gefertigten Oszillatoren auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ dem Nennwert von $f_{nenn} = 20$ MHz entspricht!

c) Gemäß einer mit dem Abnehmer der Oszillatoren vereinbarten Spezifikation darf bei maximal 2% aller gefertigten Oszillatoren die Frequenz f um mehr als ± 40 ppm des Nennwerts vom diesem abweichen. Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe, ob diese Anforderung von den gefertigten Oszillatoren erfüllt wird!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Ein Hersteller elektronischer Stimmgeräte für Musikinstrumente möchte ein neues Gerät mit einer elektrischen Schaltung ausstatten, die es ermöglicht, auf Knopfdruck den Standard-Kammerton a^1 mit einer Frequenz von f = 440 Hz zu erzeugen. Hierzu soll eine Schaltung auf Basis eines LC-Parallelschwingkreises eingesetzt werden. Da die verwendeten elektronischen Bauteile ein temperaturabhängiges Verhalten aufweisen, ist zu erwarten, dass die von der Schaltung erzeugte Frequenz eine von der Umgebungstemperatur abhängige Änderung aufweist. Um dieses Verhalten zu quantifizieren, wird an einem Geräteprototyp eine Messreihe vorgenommen. Dabei wird aufgrund von Erfahrungen angenommen, dass die Frequenz f in Abhängigkeit von der Temperaturänderung ΔT sich durch folgenden linearen Zusammenhang beschreiben lässt:

$$f = f_0 \cdot (1 + a_f \cdot \Delta T)$$

Hierin bezeichnet f_0 die Nennfrequenz bei der Referenztemperatur, a_f den Koeffizienten der linearen Frequenzänderung in Abhängigkeit von der Temperatur und ΔT die Abweichung von der Referenztemperatur T_0.

Im Rahmen einer Messreihe wird das Gerät in einer Klimakammer mit verschiedenen Temperaturen T beaufschlagt und die sich jeweils einstellende Frequenz f mit Hilfe eines Frequenzanalysators experimentell ermittelt. Dabei ergeben sich die in Tabelle 3.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten.

T / °C	14	16	18	20	22	24	26	28
f / Hz	439,05	439,44	439,72	439,93	440,27	440,63	440,84	441,21

Tabelle 3.1: Frequenz f in Abhängigkeit von der Temperatur T

Die Nennfrequenz f_0 des untersuchten Geräts beträgt $f_0 = 440$ Hz bei einer Referenztemperatur von $T_0 = 20$°C.

a) Bestimmen Sie ausgehend von obiger Messreihe mittels linearer Regression den Temperaturkoeffizienten a_f einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$!

b) Geben Sie für eine Temperatur von T = 25°C die zu erwartende Frequenz f einschließlich des zugehörigen Vertrauensbereichs auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Größen handelt!

Masse, Temperatur, Dichte, Energie, Brechungsindex, Stoffmenge, Druck, Impuls, Geschwindigkeit, Entropie

2.) Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welches der folgenden Resultate erwarten Sie?

- Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht.
- Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn.
- Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei.

Begründen Sie Ihre Antwort!

3.) Ordnen Sie die nachfolgenden Skalenniveaus aufsteigend nach ihrem Informationsgehalt!

Kardinalskala, Nominalskala, Ordinalskala

4.) Zur Untersuchung des statistischen Verhaltens einer Messgröße soll ein Histogramm mit 12 Klassen erstellt werden. Wie viele Wiederholungen der Messung sind dafür gemäß der Faustformel aus der Vorlesung erforderlich?

5.) Bei der Beobachtung eines Zufallsprozesses stellen Sie fest, dass zwischen dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ der Zusammenhang $\sigma = \sqrt{\mu}$ besteht. Um welche Art von Verteilungsfunktion handelt es sich.

6.) Welcher Punkt liegt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden?

7.) Welche Form weist die Verteilungsdichte für die Zahlen 1 bis 6 bei einem idealen Würfel auf?

8.) Wie viele Takte benötigt ein A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren maximal für die Digitalisierung einer Messgröße mit 12 Bit Auflösung?

9.) Für die indirekten Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich. Benennen und skizzieren Sie diese! Geben Sie weiterhin an, welche davon für die Messung großer Widerstände geeigneter ist!

10.) Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen -10 V und +10 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 50 kHz soll so digitalisiert werden, dass

i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 20 µV beträgt.

Geben Sie an,
a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um eine Minute des Signals darzustellen!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \, , \, f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (\text{df} = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d / \sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

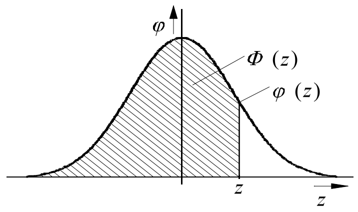
s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

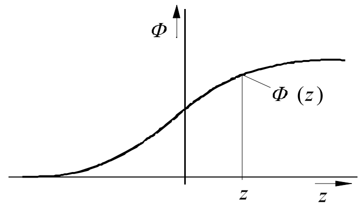
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z