Klausur

Einführung in die Messtechnik

26. August 2016

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511141)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Name: ____

Matrikel-Nr.: ____________________________________

Studiengang: ____________________________________

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich mich geistig und körperlich in der Lage befinde, die Prüfung abzulegen (d. h. prüffähig bin).

____

Unterschrift Studierende/r

Hilfe zu Aufgabe 2 erhalten: ☐ ______________________ ______________________
Unterschrift Studierende/r Betreuer

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/17	/12	/17	/21	/16	/83

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Dieses Verbot gilt insbesondere auch für sogenannte Smartwatches. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Zur Teilnahme an der Prüfung ist auf dem Deckblatt die Prüfungsfähigkeit durch Unterschrift zu bestätigen.

5. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

6. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

elektrische Kapazität: 1 F (Farad) = 1 C/V = 1 A·s/V = 1 $A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$

Druck: 1 Pa (Pascal) = 1 N/m^2 = 1 $kg/(s^2 \cdot m)$

1. Aufgabe:

Bei der kapazitiven Füllstandsmessung nutzt man die Tatsache aus, dass Flüssigkeiten eine relative Dielektrizitätskonstante ε_r größer als eins besitzen. Als Messgrößenumformer kommt daher ein Kondensator zum Einsatz, der durch die Behälterwand und eine Stabelektrode gebildet wird (siehe Abbildung 1.1).

Wird der dargestellte Behälter mit Flüssigkeit befüllt, so nimmt gleichzeitig die Kapazität des Kondensators zu. Es existiert ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Gesamtkapazität C_G und der Füllhöhe h, welcher als Berechnungsgrundlage für die Auswertung herangezogen werden kann.

Die zu bestimmende Füllhöhe h ergibt sich gemäß folgendem formelmäßigen Zusammenhang:

$$h = \frac{H}{\varepsilon_r - 1} \cdot \left(\frac{C_G - C_K}{C_E} - 1 \right)$$

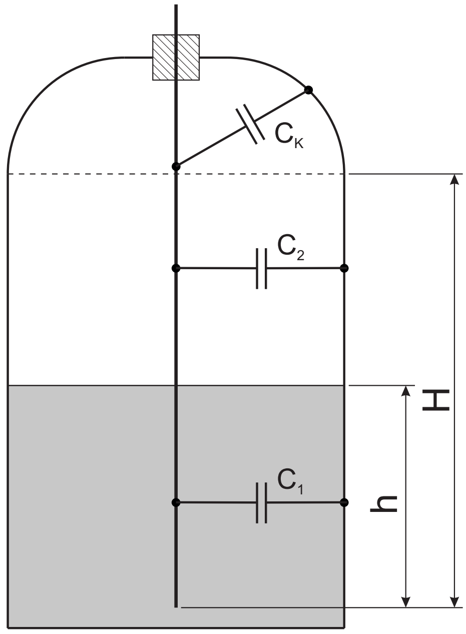


Abbildung 1.1: Prinzip der kapazitiven Füllstandsmessung eines Behälters

Hierin steht H für die maximale Füllhöhe des Behälters, ε_r für die relative Dielektrizitätskonstante des Füllmediums, C_G für die variable Gesamtkapazität des Behälters bei jeweiliger Befüllung, C_K für den konstanten Anteil der Kapazität, welcher vorwiegend aus der Kapazität zwischen Sonde und Deckel sowie Sonde und Boden gebildet wird, und C_E für die über die Höhe H gemessene Kapazität des leeren Behälters.

Im Folgenden soll die Füllhöhe h des Behälters auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen H, ε_r, C_G, C_K und C_E einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden. Die maximale Füllhöhe H wird vom Hersteller des Behälters mit einem Nennwert von H = 5000 mm angegeben. Das Konfidenzintervall der maximale Füllhöhe H gibt der Hersteller mit ± 0,5‰ vom Nennwert bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% und sehr großen n an. Als Füllmedium des Behälters wird Wasser eingesetzt, welches unter den herrschenden Umgebungsbedingungen eine relative Dielektrizitätskonstante von $\varepsilon_r = 80$ aufweist. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden. Die Kapazität C_K wird vom Hersteller des Behälters mit $C_K = 40$ pF angegeben. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden. Die Kapazität C_E wurden im Vorfeld experimentell in n = 25 Versuchen bestimmt. Das ermittelte Messergebnis beträgt $C_E = 240$ pF ± 1 pF bei P = 99%. Die Gesamtkapazität C_G wird im Zuge der Versuchsdurchführung mit insgesamt n = 9 Einzelmessungen ermittelt. Die dabei erhaltenen Einzelmesswerte sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_G / pF	3335	3405	3349	3381	3417	3426	3346	3347	3329

Tabelle 1.1: Messwerte der Gesamtkapazität C_G

a) Berechnen Sie die gesuchte Füllhöhe h des Behälters und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Abbildung 2.1: Links: vierseitiger „Würfel" (W4), hier mit Ergebnis 2; rechts: achtseitiger „Würfel" (W8), hier mit Ergebnis 1

Da Sie in Ihrer Freizeit gerne Pen-&-Paper-Rollenspiele spielen, befassen Sie sich derzeit näher mit der Wahrscheinlichkeit bestimmter Würfelergebnisse. Für die gängigen Pen-&-Paper-Rollenspiele werden in der Regel nicht nur klassische sechsseitige Würfel verwendet, sondern auch „Würfel" mit anderen Seitenanzahlen.

Zwei Standard-Würfeltypen sind hierbei der vierseitige „Würfel" – nachfolgend als W4 bezeichnet – welcher die Form eines Tetraeders aufweist, sowie der achtseitige „Würfel" – nachfolgend als W8 bezeichnet – welcher die Form eines Oktaeders aufweist (vergleiche Abbildung 2.1). Mögliche Ergebnisse beim Wurf eines einzelnen W4 sind die Zahlen 1, 2, 3 und 4, mögliche Ergebnisse beim Wurf eines einzelnen W8 sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8.

Bei dem von Ihnen untersuchten Spielzug werden jeweils ein W4 und ein W8 gemeinsam geworfen und die Summe der geworfenen Zahlen des W4 und des W8 gebildet. Mögliche Ergebnisse der Summe der geworfenen Zahlen liegen folglich im Bereich 2 bis 12. Ihnen ist ferner bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der bei beiden Würfeltypen die jeweils möglichen Zahlen geworfen werden gleichverteilt ist, dass also bei einem einzelnen Würfelwurf alle Zahlen 1 bis 4 (W4) beziehungsweise 1 bis 8 (W8) mit derselben Wahrscheinlichkeit fallen.

Für Ihre statistische Untersuchung haben Sie über insgesamt 128 Spielzüge hinweg Ihre Würfelergebnisse protokolliert und für die möglichen Ergebnisklassen die aufgetretenen Häufigkeiten ermittelt. Die dabei erhaltenen Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Ergebnis	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Häufigkeit	3	6	14	17	19	12	14	18	9	10	6

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der Summe der mit einem W4 und einem W8 geworfenen Zahlen

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung der aus den Randbedingungen der Versuchsdurchführung zu erwartenden Verteilung genügt!

Hinweis: Sofern Sie die sich aus den beschriebenen Randbedingungen ergebende theoretische relative Häufigkeitsdichte nicht ermitteln können oder Ihnen diese zweifelhaft erscheint, kann Ihnen die für den Test zu verwendende Verteilung auf Anfrage vom Betreuer zur Verfügung gestellt werden. In diesem Fall wird die Hilfestellung auf dem Deckblatt vermerkt und die auf die Bestimmung der theoretischen relativen Häufigkeitsdichte entfallenden Punkte – 3 von insgesamt 12 Punkten in Aufgabe 2 – werden ungeachtet etwaiger Lösungsansätze nicht vergeben.

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Windkraftanlagen werden im Rahmen einer Wareneingangsprüfung hochfeste Schrauben hinsichtlich ihrer 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ untersucht. Dabei wird gemäß DIN EN ISO 898 ein Zugversuch an abgedrehten Schrauben durchgeführt. Hierzu wird aus einer gelieferten Charge eine Stichprobe vom Umfang n = 20 entnommen und die 0,2%-Dehngrenze der abgedrehten Schrauben experimentell ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert der 0,2%-Dehngrenze von $\overline{R}_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2$ und eine Streuung von $S_{R_{p0,2}} = 3{,}1\ \text{N/mm}^2$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall ungefähr:

a) $R_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2 \pm 1{,}199\ \text{N/mm}^2$; P = 95% ☐
b) $R_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2 \pm 1{,}359\ \text{N/mm}^2$; P = 95% ☐
c) $R_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2 \pm 1{,}446\ \text{N/mm}^2$; P = 95% ☐
d) $R_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2 \pm 1{,}451\ \text{N/mm}^2$; P = 95% ☐
e) $R_{p0,2} = 898{,}7\ \text{N/mm}^2 \pm 1{,}983\ \text{N/mm}^2$; P = 95% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der 0,2%-Dehngrenze auf maximal ± 2 N/mm² abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 7 ☐
b) n = 9 ☐
c) n = 10 ☐
d) n = 11 ☐
e) n = 12 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Schrauben weisen dann eine 0,2%-Dehngrenze auf, die <u>außerhalb</u> des Intervalls von $895\ N/mm^2 \leq R_{p0,2} \leq 905\ N/mm^2$ liegt?

a) 2,1% ☐
b) 11,7% ☐
c) 13,8% ☐
d) 86,2% ☐
e) 97,9% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller für Verbindungstechnik betreiben Sie mehrere Fertigungslinien für hochfeste Schrauben. Für einen stark nachgefragten Schraubentyp betreiben Sie zwei voneinander unabhängige Fertigungslinien A und B. Aufgrund eines Anfangsverdachts möchten Sie anhand einer entnommenen Stichprobe untersuchen, ob der Erwartungswert $\mu_{R_{p0,2}}$ der 0,2%-Dehngrenze der auf Linie B gefertigten Schrauben signifikant kleiner als der geforderte Sollwert von $R_{p0,2} = 900\ N/mm^2$ ist.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) t-Test für Erwartungswert ☐
b) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
d) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier <u>un</u>abhängiger Stichproben X und Y möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 12 aufweisen, haben Sie Mittelwerte und Streuungen ermittelt zu $\bar{x} = 894{,}3\ N/mm^2$, $\bar{y} = 899{,}2\ N/mm^2$, $S_x = 2{,}1\ N/mm^2$ und $S_y = 2{,}2\ N/mm^2$.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) –1,835 ☐
b) –2,595 ☐
c) –5,581 ☐
d) –7,893 ☐
e) –19,333 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 10 ☐
b) 11 ☐
c) 12 ☐
d) 22 ☐
e) 23 ☐
f) 24 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert anhand einer Stichprobe die Konformität einer Charge hochfester Schrauben überprüfen. Der Nennwert der 0,2%-Dehngrenze der Schrauben beträgt $R_{p0,2;nenn} = 900\ N/mm^2$. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 25$. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Dehngrenze der Schrauben mit dem Nennwert übereinstimmt ($\mu_x = \mu_0$). Sie wählen eine einseitige Alternativhypothese ($\mu_x < \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}63$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

7. Um den Elastizitätsmodul E eines neuen Werkstoffs zu bestimmen, haben Sie eine Messreihe vom Umfang $n = 8$ durchgeführt, bei welcher an einer Zugprobe in ausgewählten Arbeitspunkten jeweils mechanische Spannung und Dehnung gemessen wurden. Sie haben mittels linearer Regression bereits in Form des Regressionskoeffizienten b den besten Schätzwert des Elastizitätsmoduls E zu E = 92 GPa ermittelt. Um ein Konfidenzintervall hierzu angeben zu können, muss noch die zugehörige Unsicherheit berechnet werden. Hierzu liegen Ihnen folgende Daten vor: Die berechnete Restvarianz beträgt $\hat{\sigma}^2 = 1{,}41 \cdot 10^{-2}\ N^2/mm^4$, die Streuung der x-Werte beträgt $S_x = 4{,}9 \cdot 10^{-4}$, das gewählte Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0{,}05$.

7.1. Ausgehend von obigen Randbedingungen lautet das vollständige Messergebnis des Elastizitätsmoduls E etwa:

a) $E = 92\ GPa \pm 0{,}0205\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐
b) $E = 92\ GPa \pm 0{,}166\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐
c) $E = 92\ GPa \pm 0{,}203\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐
d) $E = 92\ GPa \pm 0{,}2097\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐
e) $E = 92\ GPa \pm 24{,}9\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐
f) $E = 92\ GPa \pm 209{,}7\ GPa;\ \alpha = 0{,}05$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

8. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um <u>extensive</u> Grundgrößen des SI-Systems handelt!

a) elektrische Spannung ☐
b) elektrische Stromstärke ☐
c) Temperatur ☐
d) Leuchtdichte ☐
e) Länge ☐
f) Volumen ☐
g) Stoffmenge ☐
h) Gewicht ☐

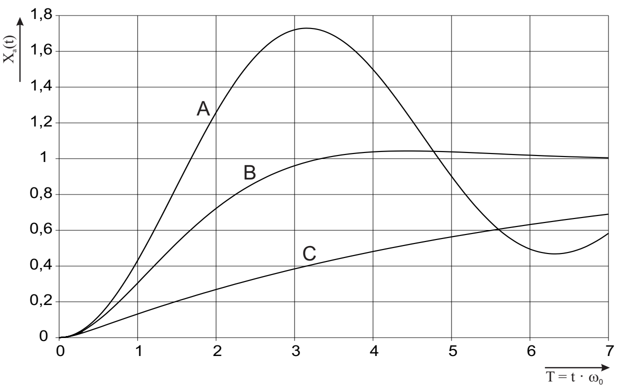
(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $1\ \text{MPa} = 10^3\ \text{GPa}$ ☐
b) $10^3\ \text{cm}^3 + 1\ \text{dm}^3 = 2{\cdot}10^{-3}\ \text{m}^3$ ☐
c) $1000\ \mu\text{m/ms} = 1\ \text{m/s}$ ☐
d) $100\ \text{nF} = 0{,}1\ \text{pF}$ ☐
e) $2\ \text{mA} + 200\ \mu\text{A} = 2{,}2{\cdot}10^{-3}\ \text{A}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

10. In nachfolgender Abbildung sind die Sprungantworten dreier – mit A, B und C bezeichneter – linearer Systeme 2. Ordnung dargestellt, welche sich hinsichtlich Ihrer Dämpfung D unterscheiden. Geben Sie an, welche Kombination von Dämpfungen D_A, D_B und D_C das Verhalten der dargestellten Systeme A, B und C qualitativ am besten beschreibt!



a) $D_A = 5$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 0{,}3$ ☐
b) $D_A = 1$; $D_B = 3$; $D_C = 5$ ☐
c) $D_A = 0{,}1$; $D_B = 1$; $D_C = 2$ ☐
d) $D_A = 0{,}1$; $D_B = \sqrt{2}/2$; $D_C = 3$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 2$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 0 V auf 10 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang etwa anliegen?

a) 3,7 V ☐
b) 6,3 V ☐
c) 7,4 V ☐
d) 10 V ☐
e) 12,6 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung unterhalb des zweiten Dezils liegen!

a) 2% ☐
b) 20% ☐
c) 40% ☐
d) 50% ☐
e) $66{,}\overline{6}\%$ ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 20 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $95 \leq \mu \leq 105$ bei $P = 99\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssen, um das Konfidenzintervall bei einer Aussagesicherheit von $P = 95\%$ ebenfalls mit $95 \leq \mu \leq 105$ oder besser angeben zu können!

a) 11 ☐
b) 12 ☐
c) 16 ☐
d) 27 ☐
e) 35 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐
d) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
e) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von –12 V bis 12 V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler 200 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 5 Bit ☐
b) 6 Bit ☐
c) 15 Bit ☐
d) 16 Bit ☐
e) 17 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der Digitalisierung von Signalen zutreffend sind!

a) Digitalisierung ist die Umwandlung eines zeit- und wertkontinuierlichen Analogsignals in ein zeit- und wertdiskretes Digitalsignal. ☐
b) Bei der Abtastung wird das Signal zu festen Zeitpunkten mit konstanten zeitlichen Abständen abgetastet, die Zustände zwischen den Abtastpunkten werden nicht berücksichtigt. ☐
c) Ist die Zeit zwischen zwei Abtastungen zu lang, ist die Dichte der Abtastpunkte zu gering und es tritt eine charakteristische Fehlmessung auf, der sogenannte „Abbe-Fehler“. ☐
d) Der zweite Schritt der Digitalisierung eines Signals ist die Quantisierung. Hierbei wird der kontinuierliche Wertebereich des Signals auf diskrete Werte abgebildet. ☐
e) Der bei der Quantisierung auftretende Rundungsfehler beträgt maximal die Hälfte der Auflösung, mit der quantisiert wird. ☐

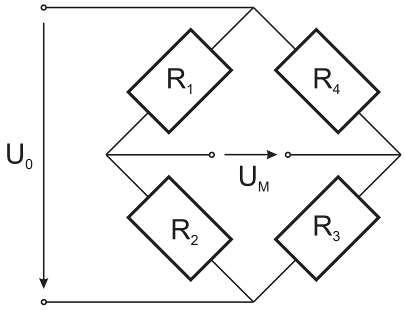
(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

a) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass die getroffene Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% korrekt ist. ☐
b) Als Fehlentscheidung 1. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich zutrifft. ☐
c) Die Güte eines statistischen Tests lässt sich durch Reduzierung des Signifikanzniveaus α erhöhen. ☐
d) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen abzusichern oder begründet zu verwerfen. ☐
e) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf <u>nicht</u> für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Wheatstone-Brücke. ☐

b) Die abgebildete Schaltung eignet sich zur Auswertung kleiner Widerstandsänderungen, z.B. bei der Verformungsmessung mit Dehnungsmessstreifen. ☐

c) Prinzipiell handelt es sich bei der abgebildeten Schaltung um die Reihenschaltung zweier Spannungsteiler. ☐

d) Eine Schaltung nach dem Prinzip der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, bezeichnet man auch als Vollbrücke. ☐

e) In einer Schaltung wie der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, heben sich vorzeichen- und betragsgleiche Änderungen angrenzender Widerstände auf. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

19. Erläutern Sie die Begriffe *superponierender äußerer Störeinfluss* und *deformierender äußerer Störeinfluss* und grenzen Sie diese gegeneinander ab!

20. Geben Sie an, welche Überprüfung mit der einfachen Varianzanalyse (einfaktorielle ANOVA) vorgenommen werden kann!

21. Bei einer Prüfung haben die insgesamt 12 Teilnehmer die in nachfolgender Tabelle zusammengefassten Noten erzielt:

Teilnehmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	2	2	2	1	3	4	2	3	2	1	3	4

Geben Sie den Medianwert und den Modalwert sowie die Spannweite obiger Notenverteilung an!

22. Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist, dass der Erwartungswert 120 N beträgt und dass 95,45% aller Messwerte im Intervall [108 N; 132 N] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt. Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen!

23. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

24. Ein als ideal angenommenes Dreiecksignal mit einer Periodendauer von 1 ms werde mit einer Abtastrate von 10 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

25. Für die indirekte Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich. Benennen und skizzieren Sie diese! Geben Sie weiterhin an, welche davon für die Messung kleiner Widerstände geeigneter ist!

26. Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \,, \; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2} \,, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i} - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad (df = 2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i-E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;\,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

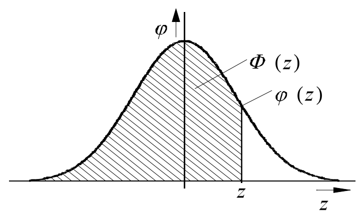
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

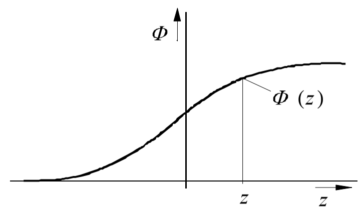
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z