iprom

INSTITUT FÜR PRODUKTIONSMESSTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

14. März 2011

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ____________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: ______________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle zugelassen. Schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 8 bis 12 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

Dichte: 1 kg/m³ = 1 g/l

Poissonverteilung $Po(\lambda): P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

1. Aufgabe:

Die Dichte eines flüssigen Mediums kann unter Ausnutzung des Archimedischen Prinzips ermittelt werden. Hiernach taucht ein Körper so weit in eine Flüssigkeit ein, bis die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit der Gewichtskraft des eingetauchten Körpers entspricht. Je kleiner also die Dichte der zu untersuchenden Flüssigkeit ist, desto tiefer wird ein schwimmender Prüfkörper in diese eintauchen. Dieser Sachverhalt kann ausgenutzt werden, um die Dichte einer Flüssigkeit experimentell aus der Eintauchtiefe eines bekannten Prüfkörpers zu ermitteln.

Für diesen Zweck verwendete Prüfkörper heißen Senkspindel oder Aräometer und bestehen vereinfacht aus einem zylindrischen Glaskörper, wie in Abbildung 1.1 skizziert. Damit der Prüfkörper in der Flüssigkeit in aufrechter Lage stabil schwimmt, ist er in seinem unteren Teil mit einem meist aus Blei bestehenden Gewicht beschwert. Der zylindrische Glaskörper trägt eine Skala, an welcher die Eintauchtiefe des Prüfkörpers abgelesen werden kann.

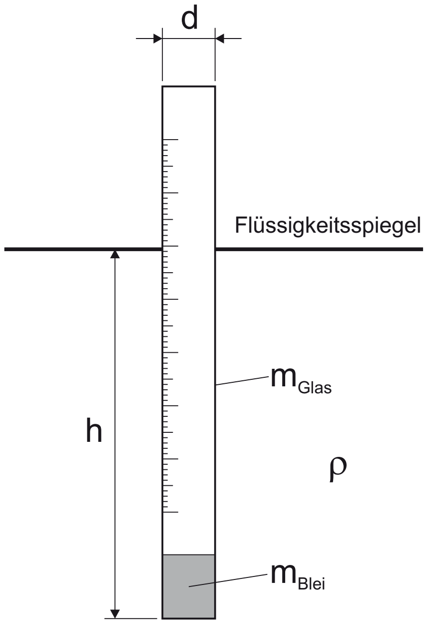


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines Aräometers

Im vorliegenden Fall weise der Glaskörper die Masse m_{Glas} auf und sei mit einem zusätzlichen Bleigewicht der Masse m_{Blei} beschwert. Die Eintauchtiefe, gemessen von der Unterkante des zylindrischen Prüfkörpers bis zum Spiegel der Flüssigkeit, wird von der Skala angezeigt und sei mit h bezeichnet. Der Durchmesser des zylindrischen Prüfkörpers betrage über die gesamte Länge d. Die Dichte ρ des zu untersuchenden Mediums ist dann näherungsweise durch folgenden formelmäßigen Zusammenhang gegeben:

$$\rho = \frac{m_{Glas} + m_{Blei}}{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2 \cdot h}$$

Im Folgenden soll die Dichte ρ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen m_{Glas}, m_{Blei}, d und h einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Massen m_{Glas} und m_{Blei} werden in einer gemeinsamen Wägung mittels einer elektronischen Präzisionswaage ermittelt. Laut Anzeige der Waage beträgt die gemeinsame Masse von Glaskörper und Bleigewicht $(m_{Glas} + m_{Blei}) = 10$ g. Laut Datenblatt der Waage beträgt deren Messunsicherheit mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ $u_m = (0{,}02\text{ g} + 0{,}1\text{ g/kg} \cdot M)$, wobei M den Messwert der Masse bezeichnet.

Der Durchmesser d des Glaszylinders wurde in 25 Wiederholungen mittels einer Bügelmessschraube gemessen. Das vollständige Messergebnis des Durchmessers beträgt $d = 12\text{ mm} \pm 0{,}006\text{ mm}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 98\%$.

(Fortsetzung auf der nächsten Seite)

Die Eintauchtiefe h wird in insgesamt n = 8 Wiederholungen von der Skala abgelesen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
h / mm	112,1	112,2	111,9	111,9	111,5	111,8	112,2	111,6

Tabelle 1.1: Messwerte der Eintauchtiefe h

a) Berechnen Sie die Dichte ρ der untersuchten Flüssigkeit und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Um mit einem Aräometer präzise Messungen der Dichte von Flüssigkeiten vornehmen zu können, müssen sowohl dessen Volumen in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe als auch dessen Masse möglichst exakt bekannt sein. Da die Masse der Glaskörper von Aräometern fertigungsbedingt etwas variieren kann, erfolgt ein Abgleich der Gesamtmasse des Aräometers durch gezielte Beeinflussung der Masse des eingebrachten Bleigewichts. Bei einem Hersteller von Aräometern sind zwei Fertigungslinien A und B in Betrieb, auf denen die Gesamtmasse der gefertigten Aräometer automatisch auf den jeweiligen Sollwert abgeglichen wird.

Zurzeit werden auf beiden Fertigungslinien Aräometer mit einer Nennmasse von 21 g gefertigt. Zur routinemäßigen Überwachung des Fertigungsprozesses wird aus beiden Fertigungslinien jeweils eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ entnommen und die Masse der entnommenen Aräometer durch einen Wägevorgang ermittelt. Die Stichproben führen zu den in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten.

	i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Linie A	m / g	20,94	21,06	20,92	21,18	21,03	21,05	21,08	21,14
Linie B	m / g	21,07	21,08	20,87	20,88	21,02	21,07	20,90	20,94

Tabelle 2.1: Messwerte der Masse m aus entnommenen Stichproben

a) Bestimmen Sie anhand obiger Messreihe für die Fertigungslinie A das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der Masse m auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

b) Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung der Masse m auf beiden Produktionsanlagen $\sigma_m = 0{,}1$ g beträgt (gilt nur für Aufgabenteil b). Welchen Umfang n müsste dann eine Stichprobe aufweisen, um den Erwartungswert der Masse m für die Fertigungslinie A auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ mit einer Unsicherheit von $c_m \leq 0{,}04$ g abschätzen zu können?

c) Gemäß einer Qualitätsvorgabe des Abnehmers der Aräometer darf bei maximal 3% aller gefertigten Aräometer die Masse um mehr als ±1% des Nennwerts von diesem abweichen. Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe, ob diese Anforderung von den auf Fertigungslinie A produzierten Aräometern erfüllt wird!

d) Zum Zwecke der Qualitätsüberwachung soll unter anderem überprüft werden, ob die beiden Fertigungslinien A und B mit demselben Erwartungswert produzieren. Überprüfen Sie daher mittels eines statistischen Tests, ob die Erwartungswerte der Masse m der auf Fertigungslinien A und B gefertigten Aräometer auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ als identisch angesehen werden können!

e) Nach längerer Beobachtung des Fertigungsprozesses ist aufgefallen, dass hin und wieder einzelne gefertigte Aräometer eine Masse aufweisen, die sich deutlich vom Nennwert unterscheidet. Der Leiter der Qualitätssicherung hat den Verdacht, dass sich die Wahrscheinlichkeit des Auftretens dieser Ausreißer durch eine Poissonverteilung beschreiben lässt. Er beauftragt Sie daher, die gesammelten Stichprobendaten der folgenden Wochen einem χ^2-Test zu unterzeihen, um seine Hypothese zu überprüfen. Im Verlauf der Testdurchführung erhalten Sie eine Testgröße von $\chi_0^2 = 16{,}1$. Die Zahl der auswertbaren Klassen beträgt $r^* = 8$. Geben Sie an, ob auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ vom Vorliegen einer Poissonverteilung ausgegangen werden kann!

Hinweis: Für die Aufgabenteile a) bis d) kann für alle Messgrößen eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Für Zweistoffsysteme wie beispielsweise Gemische von Ethanol und Wasser oder Lösungen von Zucker in Wasser kann mittels eines Aräometers abhängig von der Dichte direkt die Zusammensetzung der Gemische – also die Konzentration der Bestandteile – ermittelt werden, sofern auf der Senkspindel eine entsprechend kalibrierte Skala aufgedruckt ist. Die Massenkonzentration β einer Lösung wird dabei meist in Prozent (%) angegeben. So entspricht beispielsweise eine Massenkonzentration von 5% (= 0,05) einer Masse von 5 g pro 100 g der fertigen Lösung.

Um eine geeignete Skala für das Zweistoffsystem Zucker-Wasser zu definieren, führen Sie eine experimentelle Bestimmung der Dichte ρ von wässrigen Zuckerlösungen mit unterschiedlichen Zuckerkonzentrationen β_Z durch. Aus der Literatur ist Ihnen bekannt, dass die Abhängigkeit von Konzentration und Dichte einer wässrigen Zuckerlösung in guter Näherung einem linearen Zusammenhang genügt. Die bei Ihrer Untersuchung erhaltenen Messdaten sind in Tabelle 3.1 zusammen gefassten.

Zuckerkonzentration β_Z / %	5	10	15	20	25	30	35	40
Dichte ρ / kg/m³	1018	1038	1059	1081	1104	1127	1151	1177

Tabelle 3.1: Messwerte der Dichte ρ in Abhängigkeit von der Zuckerkonzentration β_Z einer wässrigen Zuckerlösung

a) Bestimmen Sie ausgehend von obiger Messreihe mittels linearer Regression die Veränderung der Dichte ρ in Abhängigkeit von der Zuckerkonzentration β_Z einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,1$!

b) Geben Sie für eine Zuckerkonzentration von $\beta_Z = 27,5\%$ die zu erwartende Dichte ρ einschließlich des zugehörigen Vertrauensbereichs auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,02$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Geben Sie an, welche der folgenden Größen keine Grundgrößen des SI-Systems sind! Kraft, Länge, Volumen, elektrische Spannung, elektrische Stromstärke, Masse, Stoffmenge, Temperatur, Druck

2.) Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zwischen dem ersten (Q1) und dem vierten Quintil (Q4) liegen!

3.) Geben Sie an, wie groß die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion einer Poissonverteilung $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ mit dem Parameter $\lambda = 3$ ist!

4.) Geben Sie an, ob die folgende Aussage richtig ist! „Die Verteilungsdichte für die Zahlen 1 bis 6 nimmt bei einem idealen Würfel die Form einer Binomialverteilung an.“

5.) Geben Sie an, welche beiden Arten von Fehlentscheidungen bei statistischen Tests auftreten können und erläutern Sie diese!

6.) Eine elektronische Waage verfüge über eine Digitalanzeige. Diese zeigt drei Stellen ohne Komma an. Die Einheit ist Gramm.
   a) Wie groß ist der maximal mögliche Messbereich?
   b) Wie groß ist die höchstmögliche Auflösung?
   c) Wie groß ist der maximal mögliche Parallaxenfehler?

7.) Formulieren Sie das Abtasttheorem nach Shannon! Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!

8.) Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen 0 V und +24 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 30 kHz soll so digitalisiert werden, dass
   i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
   ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 15 µV beträgt.

   Geben Sie an,
   a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
   b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
   c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um eine Minute des Signals darzustellen!

9.) Skizzieren Sie eine Wheatstone-Brückenschaltung in Vollbrückenbeschaltung einschließlich Spannungsversorgung und Abgriff der Messspannung! Geben Sie an, bei welcher qualitativen Änderung der Widerstände die maximale Änderung der Messspannung zu erwarten ist!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f, \ f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

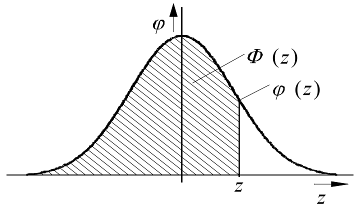
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

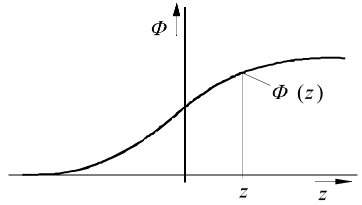
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z