Name:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsraum:

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

4. September 2015

Klausur Einführung in die Messtechnik

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511141)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

Hilfe zu Aufgabe 2 erhalten: ☐ ________________________ Unterschrift Kandidat/in ________________________ Betreuer

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE	/19	/13	/18	/21	/15	/86

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

elektrische Spannung: 1 V (Volt) = 1 W/A = 1 $\mathrm{kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)}$

elektrische Ladung: 1 C (Coulomb) = 1 $\mathrm{A \cdot s}$

magnetische Flussdichte: 1 T (Tesla) = 1 $\mathrm{Wb/m^2}$ = 1 $\mathrm{V \cdot s/m^2}$ = 1 $\mathrm{kg/(s^2 \cdot A)}$

1. Aufgabe:

Auf einer privaten Feier möchten Sie einen der anwesenden Gäste davon überzeugen, in Anbetracht der von ihm konsumierten Alkoholmenge keinesfalls mehr mit dem Auto nachhause zu fahren. Hierzu möchten Sie die voraussichtliche Blutalkoholkonzentration (BAK) des Gastes einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen berechnen. Ihrer Recherche zufolge lässt sich die Blutalkoholkonzentration c durch folgenden formelmäßigen Zusammenhang abschätzen:

$$c = \frac{A}{m \cdot k}$$

Hierin steht A für die Masse des aufgenommenen Alkohols, m für die Körpermasse der Person und k für den sogenannten Verteilungsfaktor, welcher die inhomogene Verteilung des Alkohols im Körper berücksichtigt.

Die Masse des aufgenommen Alkohols A ergibt sich aus Menge und Beschaffenheit der konsumierten alkoholischen Getränke, der Dichte von Alkohol sowie einem Resorptionsfaktor gemäß folgendem Zusammenhang:

$$A = V \cdot e \cdot \rho \cdot R$$

Hierin steht V für das Volumen der konsumierten Getränke, e für den Alkoholvolumenanteil dieser Getränke, ρ für die Dichte von Alkohol (Ethanol) und R für den Resorptionsfaktor, der angibt, welcher Anteil des oral zugeführten Alkohols vom Körper tatsächlich resorbiert wird.

Im Folgenden möchten Sie den Blutalkoholgehalt basierend auf den Angaben des Gastes sowie Literaturwerten berechnen. Der männliche Gast gibt an, zehn kleine, vom Gastgeber gezapfte Bier mit einer Nennfüllmenge von je 0,2 Liter getrunken zu haben. Um aus dieser Angabe auf die tatsächliche Trinkmenge zu schließen, nehmen Sie an insgesamt n = 8 vom Gastgeber gezapften Bier eine experimentelle Bestimmung der Füllmenge vor. Die dabei ermittelten Einzelmesswerte sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Füllmenge / ml	200	211	170	182	200	201	215	227

Tabelle 1.1: Ermittelte Füllmenge von n = 8 kleinen Bier in Milliliter

Laut Angabe des Herstellers weist das Bier einen Alkoholvolumenanteil von e = 5% auf. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden. Für die Dichte von Ethanol finden Sie bei Ihrer Recherche einen Wert von $\rho = 0{,}789$ g/ml. Dieser Wert kann als ebenfalls exakt angesehen werden. Der Resorptionsfaktor liegt nach Ihren Informationen bei $R = 0{,}8 \pm 0{,}05$ mit P = 99%.

Die Körpermasse des Gastes ermitteln Sie mithilfe einer Personenwaage durch fünfmalige Messung zu $m = 90$ kg $\pm$ 1 kg mit P = 95%. Für den Verteilungsfaktor k finden Sie die Angabe, dass dieser für männliche Personen typischerweise k = 0,69 beträgt. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

a) Berechnen Sie die gesuchte Blutalkoholkonzentration c und geben Sie das vollständige Messergebnis in g/kg (Promille) mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

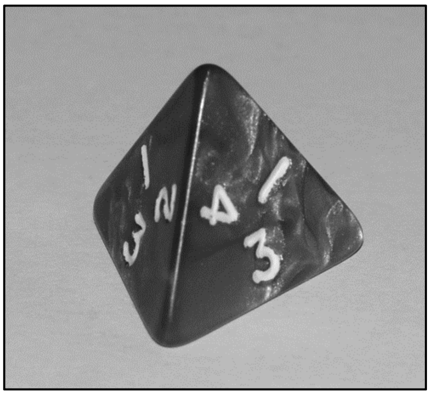


Abbildung 1.1: Vierseitiger „Würfel" (W4), hier mit Ergebnis 3

Da Sie in Ihrer Freizeit gerne Pen-&-Paper-Rollenspiele spielen, befassen Sie sich derzeit näher mit der Wahrscheinlichkeit bestimmter Würfelergebnisse. Für die gängigen Pen-&-Paper-Rollenspiele werden in der Regel nicht nur klassische sechsseitige Würfel verwendet, sondern auch „Würfel" mit anderen Seitenanzahlen. Der kleinste Standard-Würfeltyp ist hierbei der vierseitige „Würfel" – nachfolgend als W4 bezeichnet – welcher die Form eines Tetraeders aufweist (siehe Abbildung 1.1). Mögliche Ergebnisse beim Wurf eines einzelnen W4 sind die Zahlen 1, 2, 3 und 4.

Bei dem von Ihnen untersuchten Spielzug werden jeweils drei W4 geworfen und die Summe der geworfenen Zahlen aller drei W4 gebildet. Mögliche Ergebnisse der Summe der geworfenen Zahlen liegen folglich im Bereich 3 bis 12. Ihnen ist ferner bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einem einzelnen W4 die Zahlen 1 bis 4 geworfen werden gleichverteilt ist, dass also bei einem einzelnen W4 alle Zahlen 1 bis 4 mit derselben Wahrscheinlichkeit fallen.

Für Ihre statistische Untersuchung haben Sie über insgesamt 128 Spielzüge hinweg Ihre Würfelergebnisse protokolliert und für die möglichen Ergebnisklassen 3 bis 12 die aufgetretenen Häufigkeiten ermittelt. Die dabei erhaltenen Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Ergebnis	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Häufigkeit	3	3	15	24	20	30	16	8	9	0

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der Summe der mit drei W4 geworfenen Zahlen

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung der aus den Randbedingungen der Versuchsdurchführung zu erwartenden Verteilung genügt!

Hinweis: Sofern Sie die sich aus den beschriebenen Randbedingungen ergebende theoretische relative Häufigkeitsdichte nicht ermitteln können oder Ihnen diese zweifelhaft erscheint, kann Ihnen die für den Test zu verwendende Verteilung auf Anfrage vom Betreuer zur Verfügung gestellt werden. In diesem Fall wird die Hilfestellung auf dem Deckblatt vermerkt und die auf die Bestimmung der theoretischen relativen Häufigkeitsdichte entfallenden Punkte – 4 von insgesamt 13 Punkte in Aufgabe 2 – werden ungeachtet etwaiger Lösungsansätze nicht vergeben.

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Thermoelementen zur Temperaturmessung wird im Rahmen der Qualitätssicherung der thermoelektrische Empfindlichkeitskoeffizient k_{AB} mit einem Nennwert von $k_{AB_{nenn}} = 40\,\mu V/K$ überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang n = 12 entnommen und der Empfindlichkeitskoeffizient k_{AB} der Thermoelemente ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Empfindlichkeitskoeffizienten von $\overline{k}_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K$ und eine Streuung von $S_{k_{AB}} = 0{,}034\,\mu V/K$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Empfindlichkeitskoeffizient k_{AB} für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall gerundet:

a) $k_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K \pm 0{,}0176\,\mu V/K$; P = 95% ☐
b) $k_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K \pm 0{,}0192\,\mu V/K$; P = 95% ☐
c) $k_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K \pm 0{,}0214\,\mu V/K$; P = 95% ☐
d) $k_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K \pm 0{,}0216\,\mu V/K$; P = 95% ☐
e) $k_{AB} = 40{,}04\,\mu V/K \pm 0{,}0305\,\mu V/K$; P = 95% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Empfindlichkeitskoeffizient auf maximal ± 0,025 µV/K abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 6 ☐
b) n = 13 ☐
c) n = 14 ☐
d) n = 17 ☐
e) n = 20 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Thermoelemente weisen dann zusammengenommen einen Empfindlichkeitskoeffizienten von $k_{AB} \leq 40{,}0\ \mu V/K$ oder $k_{AB} \geq 40{,}1\ \mu V/K$ auf?

a) 11,9% ☐
b) 15,8% ☐
c) 50,2% ☐
d) 84,2% ☐
e) 96,1% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Als Hersteller von Thermomelementen möchten Sie den korrekten Betrieb Ihrer Fertigung sicherstellen und entnehmen zu diesem Zweck regelmäßig Stichproben aus der laufenden Produktion. Anhand der entnommenen Stichproben wird jeweils der Erwartungswert des thermoelektrischen Empfindlichkeitskoeffizienten k_{AB} der momentan gefertigten Thermoelemente abgeschätzt. Ausgehend hiervon soll die Frage geklärt werden, ob der so abgeschätzte Erwartungswert sich signifikant vom vorgegebenen Sollwert $k_{AB_{Soll}}$ unterscheidet.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) lineare Regression ☐
b) t-Test für Erwartungswert ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
d) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier unabhängiger Stichproben A und B möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 20 aufweisen, haben Sie Mittelwerte und Streuungen ermittelt zu $\overline{x}_A = 0{,}423$ m, $\overline{x}_B = 0{,}416$ m, $S_A = 0{,}028$ m und $S_B = 0{,}027$ m.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) 0,133 ☐
b) 0,805 ☐
c) 1,118 ☐
d) 1,138 ☐
e) 4,221 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 18 ☐
b) 19 ☐
c) 20 ☐
d) 38 ☐
e) 39 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben die Wirksamkeit zweier Nahrungsergänzungsmittels A und B zur Gewichtsreduktion vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt n = 25. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Wirkung der beiden Nahrungsergänzungsmittel sich nicht unterscheidet ($\mu_d = 0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_d \neq 0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 1{,}94$

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

7. Um die Hall-Konstante A_H eines neuen Werkstoffs zu bestimmen, haben Sie eine Messreihe durchgeführt, bei welcher in bestimmten Arbeitspunkten jeweils Strom und Spannung an einem Hall-Element gemessen wurden. Unter Berücksichtigung der relevanten Konstanten – magnetische Flussdichte und Dicke des Hall-Elements – erhalten sie die in nachfolgender Tabelle zusammengefassten x-y-Wertepaare:

x / kV·C/m³	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
y / V	3,9	6,02	7,96	9,99	12,03

Die gesuchte Hall-Konstante A_H ergibt sich als Regressionskoeffizient aus obigen x-y-Wertepaaren.

7.1. Geben Sie ausgehend von obiger Messreihe an, welchen Wert die Hall-Konstante A_H etwa annimmt!

a) $8{,}092 \cdot 10^{-6}$ m³/C ☐
b) $8{,}092 \cdot 10^{-3}$ m³/C ☐
c) 8,092 m³/C ☐
d) 0,12356 m³/C ☐
e) 123,56 m³/C ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

8. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Grundgrößen des SI-Systems handelt!

a) Temperatur ☐
b) Länge ☐
c) elektrische Spannung ☐
d) elektrischer Strom ☐
e) Gewicht ☐
f) Stoffmengenkonzentration ☐
g) molare Masse ☐
h) Leuchtdichte ☐

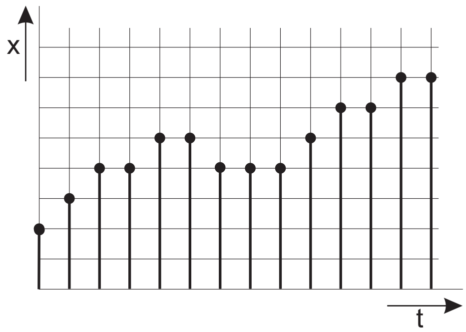
(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $1\ \text{pF} = 1{\cdot}10^{3}\ \text{nF}$ ☐
b) $1\ \text{W} = 1\ \text{m}^2{\cdot}\text{kg/s}^3$ ☐
c) $10^{3}\ \text{cm}^3 + 1\ \text{dm}^3 = 2{\cdot}10^{-3}\ \text{m}^3$ ☐
d) $100\ \text{ns} + 1{\cdot}10^{-3}\ \text{ms} = 1{,}1{\cdot}10^{-6}\ \text{s}$ ☐
e) $1\ \text{GW} = 10^{3}\ \text{MW}$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

10. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 20 V auf 0 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang etwa anliegen?

a) 3,7 V ☐
b) 6,3 V ☐
c) 7,4 V ☐
d) 10 V ☐
e) 12,6 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung oberhalb des zweiten Quintils liegen!

a) 25% ☐
b) 40% ☐
c) 50% ☐
d) 60% ☐
e) 75% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 9 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $8 \leq \mu \leq 24$ bei $P = 95\%$ bestimmt, wobei die Standardabweichung σ als bekannt angenommen wurde. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen bei unveränderter Standardabweichung mindestens durchgeführt werden müssten, um das Konfidenzintervall bei einer Aussagesicherheit von $P = 99\%$ ebenfalls auf mit $8 \leq \mu \leq 24$ oder besser angeben zu können!

a) 12 ☐
b) 15 ☐
c) 16 ☐
d) 18 ☐
e) 45 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem Gefäß, welches mit jeweils 10 Kugeln der Farben rot, grün, blau, gelb und violett gefüllt ist pro Versuch jeweils nur eine einzelne Kugel entnehmen und diese im Anschluss zurücklegen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die bei einem derartigen Versuch zu beobachtende Auftretenswahrscheinlichkeit der fünf möglichen Farben beschreiben?

a) Binomialverteilung ☐
b) Normalverteilung ☐
c) Diskrete Gleichverteilung ☐
d) Poissonverteilung ☐
e) Hypergeometrische Verteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Geben sie an, wie viele Takte ein A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren maximale für die Digitalisierung einer Messgröße mit 12 Bit Auflösung benötigt!

a) 1 Takt ☐

b) 12 Takte ☐

c) $12^2 = 144$ Takte ☐

d) $2^{12} = 4096$ Takte ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über inkrementale Wegmesssysteme zutreffend sind!

a) Inkrementale Wegmesssysteme können basierend auf unterschiedlichen physikalischen Wirkprinzipien realisiert werden, wie z.B. optisch, elektrisch oder magnetisch. ☐

b) Um bei einem inkrementalen Wegmesssystem Informationen über die Bewegungsrichtung zu gewinnen, werden in der Regel zwei um 90° phasenverschobene Signale genutzt. ☐

c) Wird bei einem inkrementalen Wegmesssystem die Signalauswertung auch nur kurzzeitig unterbrochen, geht die Information über die Absolutposition in der Regel verloren. ☐

d) Ein typisches Einsatzgebiet für kapazitive inkrementale Wegmesssysteme stellen digitale Messschieber dar. ☐

e) Bei inkrementalen Wegmesssystemen ist durch Interpolationstechniken oftmals einen Steigerung des Auflösungsvermögens über die Teilung der Maßverkörperung hinaus möglich. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Die Bügelmessschraube ist robust gegenüber dem Auftreten des Abbe-Fehlers, da bei ihr im Regelfall Antast- und Messlinie fluchten. ☐

b) Der Nonius eines Messschiebers stellt eine Hilfsteilung dar, welche dazu dient, die Ablesegenauigkeit zu erhöhen. ☐

c) Bei einem Messschieber stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐

d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt. ☐

e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im engeren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Bei der Messung des Spannungsabfalls über einem Widerstand mittels eines Spannungsmessgerätes welches direkt an die Zuleitungen des Widerstandes angeschlossen wird kann es aufgrund des Widerstandes der Zuleitungen zu systematischen Messabweichungen kommen. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich dieser Messabweichungen zutreffend sind!

a) Die systematischen Abweichungen entstehen dadurch, dass die widerstandsbehafteten Zuleitungen des Widerstandes von demselben Strom durchflossen werden, wie der Widerstand selbst. ☐

b) Die durch den Widerstand der Zuleitungen verursachte systematische Messabweichung bewirkt, dass der gemessene Spannungsabfall geringer ist, als der tatsächliche Spannungsabfall über dem Widerstand. ☐

c) Bei der Spannungsmessung an großen Widerständen wirkt sich der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen stärker auf das Messergebnis aus, als bei der Messung an kleinen Widerständen. ☐

d) Bei bekannten Leitungswiderständen kann die Abweichung rechnerisch korrigiert werden. ☐

e) Sind die Leitungswiderstände nicht bekannt und können nicht vernachlässigt werden, kann der Einfluss der Leitungswiderstände durch Einsatz einer Vierleiterschaltung reduziert werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

19. Erläutern Sie die Begriffe *direkte Messmethode im engeren Sinne* sowie *direkte Messmethode im weiteren Sinne* und nennen Sie für beide Arten von Messmethoden je ein Beispiel!

20. Ordnen Sie die nachfolgenden Skalenniveaus aufsteigend nach ihrem Informationsgehalt!
Kardinalskala, Nominalskala, Ordinalskala

21. Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!

22. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

23. Ein Dreiecksignal mit einer Periodendauer von 10 ms werde mit einer Abtastrate von 1 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

24. Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist, dass der Erwartungswert 100 N beträgt und dass 99,73% aller Messwerte im Intervall [79 N; 121 N] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt. Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen!

25. Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen -24 V und +24 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 10 kHz soll so digitalisiert werden, dass
i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 2 µV beträgt.
Geben Sie an,
a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um eine Minuten des Signals darzustellen!

26. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgeräts (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.
a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für *f* mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \,,\; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2} \;,\; c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i} - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,\dots,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,\dots,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,\dots,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

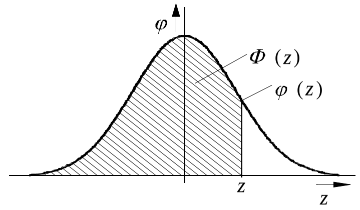
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

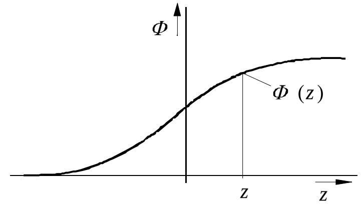
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z