Musterlösung

zur Klausur „Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen“

27. 06. 2014

Lösung Kurzfragen

1. nein (stark gedämpfte Systeme höherer Ordnung schwingen ebenfalls nicht.)

2. Den Stichprobenumfang n.

3. Sie sind gleich

4. Maximum beim Erwartungswert $\mu = 0$, $P = 0\%$, da $P(x = \mu) = \int_{\mu}^{\mu} h(x)dx = 0$ (Wahrscheinlichkeit ist Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion und die ist für einen einzelnen Wert gleich Null)

5. 40%

6. mindestens ein Messgerät und Hilfsmittel

7. Ein innerer Störeinfluss (oder auch: Rückwirkung durch die Messgröße und sinngemäß)

8. $\mu \pm 1\sigma$

9. Vier Größen aus Länge (Meter), Masse (Kilogramm), Zeit (Sekunde), Stromstärke (Ampere), Temperatur (Kelvin), Stoffmenge (Mol), Lichtstärke (Candela)

Lösung Aufgabe 1

Auflösen der Gleichung nach T:

$$T = \frac{U}{S_\mathrm{A} - S_\mathrm{B}} + T_0$$

Alle enthaltenen Größen (U, S_A, S_B, T_0) sind abweichungsbehaftet.

Ggf. Umrechnen in SI-Basiseinheiten:

$$\begin{aligned}
S_\mathrm{A} &= (-35 \pm 0,2)\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{K}} = -3,5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} \pm 2 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}}; P\% = 99\% \\
S_\mathrm{B} &= (19 \pm 0,1)\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{K}} = 1,9 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} \pm 1 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}}; P\% = 95\% \\
T_0 &= (50 \pm 0,1)\,^\circ\mathrm{C} = (323,15 \pm 0,1)\,\mathrm{K}; P\% = 99\%
\end{aligned}$$

Umrechnen des Konfidenzintervalls des Seebeck-Koeffizienten S_B von P%=95% auf P%=99%:

Allgemeine Formel: $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$

Hier (lt. Aufgabenstellung ist n sehr groß):

$$\begin{aligned}
t_{n-1;1-\alpha_1/2} &= t_{\infty;0,995} = 2,58 \\
t_{n-1;1-\alpha_2/2} &= t_{\infty;0,975} = 1,96 \\
\Rightarrow c_{S_\mathrm{B};99\%} &= c_{S_\mathrm{B};95\%} \frac{t_{\infty;0,995}}{t_{\infty;0,975}} \\
&= 0,1\frac{\mu V}{K} \cdot \frac{2,58}{1,96} \approx 0,132\frac{\mu V}{K} (0{,}1316) \\
\text{bzw.} &= 1 \cdot 10^{-7}\frac{V}{K} \cdot \frac{2,58}{1,96} \approx 1,316 \cdot 10^{-7}\frac{V}{K}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_\mathrm{B} = 19\frac{\mu V}{K} \pm 0,132\frac{\mu V}{K} = 1,9 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} \pm 1,316 \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}}; P\% = 99\%$$

Berechnung der Messtemperatur T aus den Thermospannungen U:

Mittelwert und Streuung:

$$\begin{aligned}
\overline{U} &= 738,09\,\mu\mathrm{V} \approx 7,381 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V} \\
s_\mathrm{U} &= 7,583\,\mu\mathrm{V} = 7,583 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V} (7{,}583088)
\end{aligned}$$

Das Konfidenzintervall für die Thermospannung U für $n = 10$ Messungen und $\alpha = 0,01$ und daraus folgend $t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{9;0,995} = 3,25$ ist dann:

$$c_{\mathrm{U}} = \frac{s_{\mathrm{U}}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2} = \frac{7,583\,\mu\mathrm{V}}{\sqrt{10}} \cdot t_{9;0,995} = 7,793\,\mu\mathrm{V} = 7,793 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}$$

Zwischenergebnis:

$$U = (738,09 \pm 7,793)\,\mu\mathrm{V} = 7,381 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V} \pm 7,793 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}$$

Berechnung des Mittelwerts für die Temperatur $\overline{T}$:

$$\begin{aligned}
\overline{T} = \frac{\overline{U}}{\overline{S}_{\mathrm{A}} - \overline{S}_{\mathrm{B}}} + \overline{T}_0 &= \frac{738,09\,\mu\mathrm{V}}{(-35\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{K}} - 19\,\frac{\mu\mathrm{V}}{\mathrm{K}})} + 323,15\,\mathrm{K} \\
\text{bzw.} &= \frac{7,381 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}}{(-3,5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}} - 1,9 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{K}})} + 323,15\,\mathrm{K} \\
&= 309,482\,\mathrm{K} (= 36,332\,^{\circ}\mathrm{C})
\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial T}{\partial S_{\mathrm{A}}}\right|_{\overline{S}_{\mathrm{A}},\overline{S}_{\mathrm{B}},\overline{U},\overline{T}_0} &= -\frac{\overline{U}}{(\overline{S}_{\mathrm{A}} - \overline{S}_{\mathrm{B}})^2} && = -253117,28\,\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{V}} \;\; (\text{-0,235117}\,\frac{K^2}{\mu V}) \\
\left.\frac{\partial T}{\partial S_{\mathrm{B}}}\right|_{\overline{S}_{\mathrm{A}},\overline{S}_{\mathrm{B}},\overline{U},\overline{T}_0} &= \frac{\overline{U}}{(\overline{S}_{\mathrm{A}} - \overline{S}_{\mathrm{B}})^2} && = 253117,28\,\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{V}} \;\; (\text{0,235117}\,\frac{K^2}{\mu V}) \\
\left.\frac{\partial T}{\partial U}\right|_{\overline{S}_{\mathrm{A}},\overline{S}_{\mathrm{B}},\overline{U},\overline{T}_0} &= \frac{1}{\overline{S}_{\mathrm{A}} - \overline{S}_{\mathrm{B}}} && = -18518,52\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{V}} \;\; (\text{-0,018519}\,\frac{K}{\mu V}) \\
\left.\frac{\partial T}{\partial T_0}\right|_{\overline{S}_{\mathrm{A}},\overline{S}_{\mathrm{B}},\overline{U},\overline{T}_0} & && = 1
\end{aligned}$$

Konfidenzintervall der Temperatur:

$$\begin{aligned}
c_{\mathrm{T}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial S_{\mathrm{A}}} \cdot c_{S_{\mathrm{A}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial S_{\mathrm{B}}} \cdot c_{S_{\mathrm{B}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial U} \cdot c_U\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial T_0} \cdot c_{T_0}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-253117,28 \cdot 2 \cdot 10^{-7})^2 + (253117,28 \cdot 1,316 \cdot 10^{-7})^2 + (-18518,52 \cdot 7,793 \cdot 10^{-6})^2 + (1 \cdot 0,1)^2}\mathrm{K} \\
&= \sqrt{(-0,253117 \cdot 0,2)^2 + (0,253117 \cdot 0,132)^2 + (-0,018519 \cdot 7,793)^2 + (1 \cdot 0,1)^2}\mathrm{K} \\
&\approx 0,1857\,\mathrm{K} \text{ (bei Rechnung in µV auch 0,1858 K oder bei Runden der Werte dabei auch 0,1856 K)}
\end{aligned}$$

Vollständiges Ergebnis für die Temperatur T ist dann:
T**=(309,482 ± 0,1857) K** bzw. T**=(36,332 ± 0,1857) °C**

Lösung Aufgabe 2

Geeigneter Test: χ^2-Test
Hypothese: H_0: Die Anzahl der Töchter ist Bin$(3; 0,5)$-verteilt.

Anzahl befragter Familien: $N = 1000$
Parameter Binomialverteilung aus Aufgabenstellung: $n = 3$, $p = 50\% = 0,5$, $k \in (0,1,2,3)$
Alle Klassen sind mit mehr als 5 Klassenelementen besetzt, keine Zusammenlegung erforderlich.

Anzahl Töchter (k)	0	1	2	3
erwartete Häufigk. E_i	$\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k} \cdot N = \frac{6}{6} \cdot (\frac{1}{2})^0 \cdot (\frac{1}{2})^3 \cdot 1000 = 125$	375	375	125
beobachtete Häufigk. B_i	140	349	351	160
Testgröße $\frac{(B_i-E_i)^2}{E_i}$	$\frac{(140-125)^2}{125} = 1,8$	$1,803$	$1,536$	$9,8$

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{(B_i - E_i)^2}{E_i} \right) = 14,939$$

kritischer Wert aus Tabelle:
Parameter: Klassenanzahl $r = 4$, aus der Stichprobe abgeschätzte Parameter $s = 0$

$$\chi^2_{\text{krit}} = \chi^2_{\text{r}-\text{s}-1;1-\alpha} = \chi^2_{4-0-1;0,95} = 7,81$$

Kriterium: H_0 wird abgelehnt, wenn $\chi^2 > \chi^2_{\text{krit}}$
Entscheidung: $\chi^2 = 14,939 > 7,81 = \chi^2_{\text{krit}}$, die Hypothese H_0 wird abgelehnt.

Antwortsatz: Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0,05$ (oder 5%) kann gefolgert werden, dass die Anzahl der Töchter in den befragten Familien nicht Bin$(3; 0,5)$-verteilt ist.