Musterlösung

zur Klausur „Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen“

28.6.2013

Lösung Kurzfragen

1. Der systematische Anteil
2. Größe bleibt bei Teilung erhalten; Temperatur oder Druck
3. mindestens
   a) Median: ordinal skaliert
   b) arithm. Mittelwert: metrisch/kardinal-skaliert.
4. Fehlmessung durch Nichtberücksichtigung des Shannontheorems / Unterabtastung $\rightarrow$ fehlerhafte Rekonstruktion des gemessenen Signals
5. Normalverteilung $\rightarrow$ 50% der Durchmesser sind kleiner als der Mittelwert und 68,3% aller Werte liegen innerhalb $\pm 1\sigma$. $51mm = \mu + 1\sigma$. Kleiner als 51mm sind als 50%+1/2*68,3% der Kugeln, d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 84,15%.
   Anmerkung: Da die Tabelle der Summenfunktion der (standardisierten) Normalverteilung nicht gegeben war, und reines Auswendiglernen von Zahlen in der Übung nicht als notwendig bekanntgegeben war, entfällt die Wertung für das richtige Ergebnis. Die Erkenntnis, dass das Loch einen Durchmesser von $\mu + 1\sigma$ hat, bleibt aber zu bewerten.
6. Kompensieren, rechnerische Korrektur.
7. Maximum beim Erwartungswert μ, 0%, da $P(x = \mu) = \int\limits_{\mu}^{\mu} h(x)dx$ (Wahrscheinlichkeit ist Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion und die ist Null).
8. Eichen ist Kalibrieren durch staatlich autorisierte Stelle, Eichen ist Kalibrieren nach gesetzlichen Anforderungen/Vorschriften o. sinngemäß ähnlich.

Lösung Aufgabe 1

Das mittlere Gewicht ist $\overline{x} = 310,15g$.
Die Standardabweichung ist $\sigma = 8,786g$.
Die Standardabweichung des Mittelwerts ist $\sigma_{\overline{x}} = 1,965g$.

$n = 20$, Aussagesicherheit von P%=95% bzw. P%=99% ist gefordert.

$\rightarrow (\alpha = 0,05): \; t_{\mathrm{n}-1;1-\alpha/2} = t_{19;0{,}975} = 2,09$
$\rightarrow (\alpha = 0,01): \; t_{\mathrm{n}-1;1-\alpha/2} = t_{19;0{,}995} = 2,86$

Breite des Konfidenzintervalls:
$c_{\mathrm{P\%=95\%}} = 4,11g \; (4,107g) \rightarrow m_{\mathrm{Bachforelle}} = 310,15 \pm 4,11g$; P%=95%
$c_{\mathrm{P\%=99\%}} = 5,62g \rightarrow m_{\mathrm{Bachforelle}} = 310,15 \pm 5,62g$; P%=99%

Kein Antwortsatz erforderlich.

Lösung Aufgabe 2

Garten	Befall vor Anwendung	Befall nach Anwendung	Änderung d
1	13	13	0
2	22	19	-3
3	25	28	3
4	36	40	4
5	32	24	-8
6	50	47	-3
7	26	30	4
8	21	20	-1

Test:
t-Test für verbundene Stichproben,
einseitige Hypothese (Verbesserung der Schädlingsbekämpfung)
Nullhypothese: $H_0: \; \mu_d = 0$, Alternativhypothese $H_1: \; \mu_d < 0$
Es gab auch die umgekehrte Richtung bei der Differenzbildung ($d = \mathrm{Befall}_{\mathrm{vorher}} - \mathrm{Befall}_{\mathrm{nachher}}$), so dass dann die Alternativhypothese lauten muss: $H_1: \; \mu_d > 0$. Dementsprechend ergeben sich im Folgenden dann auch umgekehrte Vorzeichen und Ungleichungen.

Mittelwert der Änderungen: $\overline{d} = -0,5$
Standardabweichung der Änderungen: $\sigma = 4,175 \; (4,1748)$
$n = 8$

Testgröße: $t_0 = \frac{\overline{d}}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{d}\sqrt{n}}{\sigma} = -0,339$

Test: Ist $t_0 < -t_{\mathrm{n}-1;1-\alpha} = -t_{7;0{,}95} = -1,9$? ↯
Ergebnis: $t_0 \not< -t_{7;0{,}95}$, die Nullhypothese **wird nicht** abgelehnt.

Das neue Mittel zur Schädlingsbekämpfung führt **nicht** zu einer signifikanten Verringerung des Schädlingsbefalls.

Lösung Aufgabe 3

Test: Varianzanalyse (ANOVA)
Nullhypothese H_0: Alle Stichproben haben den gleichen Erwartungswert.

	Pflanze i					
Düngemittel j	1	2	3	4	5	$\overline{W}_j$
A	10,0	9,5	9,0	10,8	9,8	9,82
B	10,8	11,5	12,0	11,0	12,4	11,54
C	12,5	12,5	13,2	12,0	11,5	12,34
D	9,0	9,1	10,5	10,1	10,3	9,8

Mittelwert des Gewichts aller Kürbisse: $\overline{W} = 10,875kg$

Hilfsgrößen:

> $k = 4$ (Gruppen), $n = 20$ (Pflanzen), $n_j = 5$ Pflanzen pro Gruppe
> Standardabweichung des Kürbisgewichts: $S = 1,286kg$
> Gesamtvariation $SQ_{\text{total}} = 31,418kg^2$ (Quadratsumme der Abweichungen vom Mittelwert) oder $SQ_{\text{total}} = 31,422kg^2$ (berechnet aus $SQ_{\text{total}} = \frac{S^2}{n-1}$)

Summe der Abweichungsquadrate zwischen den Stichproben
$SQZ = \sum_{j=1}^{4} n_j(\overline{W}_j - \overline{W}_{ij})^2 = 24,286kg^2$

Summe der Abweichungsquadrate innerhalb der Stichprobe
$SQI = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{5}(W_{ij} - \overline{W}_j)^2 = 7,132kg^2$
oder $SQI = SQ_{\text{total}} - SQZ = 7,136$

Freiheitsgrade:
$FGZ = k - 1 = 3;\ FGI = n - k = 16$

Mittlere Quadratsumme zwischen den Stichproben:
$MQZ = \frac{SQZ}{FGZ} = \frac{24,286kg^2}{3} = 8,095kg^2$

Mittlere Quadratsumme innerhalb der Stichproben (dabei ist es annähernd egal, ob SQI aus den Abweichungen vom Stichprobenmittelwert oder Differenz zu SQ_{total} berechnet wurde):
$MQI = \frac{SQI}{FGI} = \frac{7,132kg^2}{16}\text{bzw.}\frac{7,136kg^2}{16} = 0,446kg^2$

Testgröße: $F_0 = \frac{MQZ}{MQI} = \frac{8,095kg^2}{0,446kg^2} = 18,15$

Grenzwert aus F-Verteilung (Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$): $F_{\text{FGZ;FGI;}1-\alpha} = F_{3;16;0,95} = 3,24$

Test: Ist $F_0 > F_{3;16;0,95}$? $\checkmark$

Die Nullhypothese H_0 **wird** abgelehnt.

Die verschiedenen Düngemittel **haben** einen signifikanten Einfluss auf das Erntegewicht der Kürbisse.