Musterlösung zur Klausur
Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen vom 20.3.2009

Kurzfragen

1. richtig

2. - Feststellen der systematischen Messabweichung eines Messgerätes
   bzw.
   - Feststellen des Zusammenhangs von Eingangs- und Ausgangsgröße eines Messgerätes/-systems
   bzw.
   - Vergleich der angezeigten Messwertes mit einem Normal

3. - 50 % aller Werte sind kleiner bzw. größer als Medianwert, halbiert die Stichprobe
   - Lageparameter

4. Ordinalskala

5. Meter und Sekunde, über Vakuumlichtgeschwindigkeit verknüpft

6. Stichprobenumfang n

7. eines von
   - unempfindlich gegen Störeinflüsse
   - geringe Rückwirkung
   - konstanter Arbeitspunkt

8. - bandbegrenzt → es existiert eine maximale Signalfrequenz im Spektrum
   - z.B. Rechteck-, Sägezahn-, Dreieck-Signal... alles mit Sprüngen oder Knicken im Signalverlauf

Aufgabe 1.

$\beta = const \rightarrow$ nicht ableiten

$c = (1484 \pm 0,9)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ P=95 % $\rightarrow$ umrechnen

$d = (0,1 \pm 0,00002)\,\mathrm{m}$ P=99 % $\rightarrow$ direkt verwendbar

$$c_c = \frac{t_{9\,;\,0{,}995}}{t_{9\,;\,0{,}975}} \cdot c_c(95\,\%) = \frac{3,25}{2,26} \cdot 0,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\underline{c_c = 1,2942\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{P=99 \%}}$$

$$\underline{c = (1484 \pm 1,2942)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{P=99 \%}}$$

$$\overline{\Delta t} = 148,228\,\mathrm{ns}$$

$$S_{\Delta t} = 0,75214\,\mathrm{ns}$$

$$c_{\Delta t} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{6\,;\,0{,}995} = \frac{0,75214}{\sqrt{7}} \cdot 3,71$$

$$\underline{c_{\Delta t} = 1,0547\,\mathrm{ns}}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial c}\right|_{\overline{x_i}} = \frac{c}{d\cos\beta} \cdot \Delta t = \frac{1484}{0,1 \cdot \cos 45°} \cdot 148,228 \cdot 10^{-9} = \underline{3,111 \cdot 10^{-3}} \qquad \text{(dimensionslos)}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial d}\right|_{\overline{x_i}} = \frac{-c^2}{2d^2\cos\beta} \cdot \Delta t = \frac{-1484^2}{2 \cdot 0,01 \cdot \cos 45°} \cdot 148,228 \cdot 10^{-9}\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{-23,08\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \Delta t}\right|_{\overline{x_i}} = \frac{c^2}{2d\cos\beta} = \frac{1484^2}{2 \cdot 0,1 \cdot \cos 45°}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{1,5572 \cdot 10^7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

$$\overline{v} = \frac{c^2}{2d\cos\beta} = \frac{1484^2}{2 \cdot 0,1 \cdot \cos 45°} \cdot 148,228 \cdot 10^{-9}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{2,308\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$c_v = \sqrt{\left.\frac{\partial v}{\partial c}\right|_{\overline{x_i}} c_c + \left.\frac{\partial v}{\partial d}\right|_{\overline{x_i}} c_d + \left.\frac{\partial v}{\partial \Delta t}\right|_{\overline{x_i}} c_{\Delta t}} = \ldots = \underline{0,0169\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\underline{\underline{v = 2,308\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 0,0169\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \text{P=99 \%}}}$$

Aufgabe 2.

$H_0 : X$ ist Poisson-verteilt

$\overline{X} = (93 \cdot 0 + 206 \cdot 1 + \ldots + 13 \cdot 6)/850 = 1799/850 = 2,116$

$\rightarrow \overline{X} \approx 2,1 \rightarrow$ für tabellarische Werte für $h(x)$ (Poissonverteilung)

Für den auf 2,1 gerundeten Mittelwert kann man die Werte für h(x) bzw. H(x) aus der Tabelle ablesen. Damit ergibt sich folgende Berechnugnstabelle:

i	X_i	$y_i = B_i$	$H(X_i)$	$n \cdot H(X_i) = E_i$	$B_i - E_i$	$(B_i - E_i)^2/E_i$
1	0	93	0,1225	104,13	-11,125	1,189
2	1	206	0,2572	218,62	-12,620	0,728
3	2	244	0,2700	229,50	14,500	0,916
4	3	176	0,1890	160,65	15,350	1,467
5	4	91	0,0992	84,32	6,680	0,529
6	5	27	0,0417	35,45	-8,445	2,012
7	6	13	0,0146	12,41	0,590	0,028
						$\chi_0^2 = \mathbf{6,869}$

Wird mit dem berechneten Mittelwert von 2.116 und der angegebenen Formel für h(x) gearbeitet, so ergibt sich:

i	X_i	$y_i = B_i$	$H(X_i)$	$n \cdot H(X_i) = E_i$	$B_i - E_i$	$(B_i - E_i)^2/E_i$
1	0	93	0,1225	102,43	-9,425	0,867
2	1	206	0,2549	216,67	-10,665	0,525
3	2	244	0,2698	229,33	14,670	0,938
4	3	176	0,1903	161,76	14,245	1,254
5	4	91	0,1007	85,60	5,405	0,341
6	5	27	0,0426	36,21	-9,210	2,343
7	6	13	0,0150	12,75	0,250	0,005
						$\chi_0^2 = \mathbf{6,274}$

$s = 7 - 1 - 1 = 5$

$p = 1 - 0,05 = 0,95$

$\chi^2_{krit} = 11,1$ (aus Tabelle)

$\chi_0^2 < \chi^2_{krit} \quad \rightarrow H_0$ wird nicht abgelehnt

$\rightarrow$ X ist auf einem Signifikanzniveau von 0,05 Poisson-verteilt!