Institut für Produktionsmesstechnik
Technische Universität Braunschweig

Klausur

Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

28.6.2013

Name: . . . .

Matrikel-Nr.: . . . .

Lfd. Nummer (von Bioinformatik-Klausur) . . . .

Aufgabe	Kurzfragen	1	2	3	Gesamt
Punkte					

Kurzfragen

1. Welcher Anteil der Messabweichung kann durch Kalibrieren korrigiert werden?
2. Wodurch ist eine intensive Messgröße charakterisiert? Nennen Sie ein Beispiel für eine solche Größe.
3. Welches Skalenniveau ist für die Bildung eines
   a) Medians
   b) arithmetischen Mittelwerts

   mindestens erforderlich?
4. Erläutern Sie den Begriff „Aliasing-Fehler“!
5. Der mittlere Durchmesser von 137 Glaskugeln sei 49,739 mm, die Standardabweichung betrage 1,261 mm. Der Durchmesser der Kugeln sei normalverteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser Kugeln durch ein Loch mit einem Durchmesser von exakt 51 mm fällt?
6. Beim Messen wird das Messobjekt immer durch die Messung beeinflusst. Diese Beeinflussung sei nicht vernachlässigbar. Welche Möglichkeiten gibt es, den Einfluss durch die Messung zu berücksichtigen?
7. Bei welchem Wert auf der x-Achse x liegt das Maximum einer Normalverteilung? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt genau dieser Wert bei einer Stichprobe auf? Begründen Sie Ihre Antwort!
8. Worin besteht formal der Unterschied zwischen Kalibrieren und Eichen?

Aufgabe1

Bei einer Untersuchung von Bachforellen wurde deren Gewicht gemessen. Die Messergebnisse sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Gewicht der Bachforellen (in g)

294	300	310	302	296	311	310	310	316	321
309	326	325	310	305	304	321	308	315	310

Geben Sie die Vertrauensbereiche für den Erwartungswert des Gewichts mit den statistischen Sicherheiten P%=95% und P%=99% an.

Aufgabe 2

In einem Kleingartenverein sind die meisten Kartoffelpflanzen von Kartoffelkäfern befallen. Einer der Kleingärtner hat kürzlich ein neues Mittel zur Schädlingsbekämpfung entdeckt, dessen angeblich verbesserte Wirkung nun auf dem Prüfstand ist. An dem Test beteiligen sich sieben weitere Kleingärtner.

Der Befall der Kartoffelpflanzen wird zwei Tage vor und fünf Tage nach der Anwendung überprüft. Die Messgröße „befallene Pflanzen“ soll dabei als normalverteilt angenommen werden. Die Anzahl der befallenen Pflanzen in den jeweiligen Gärten ist in der folgenden Tabelle angegeben.

Garten	Befall vor Anwendung	Befall nach Anwendung
1	13	13
2	22	19
3	25	28
4	36	40
5	32	24
6	50	47
7	26	30
8	21	20

Helfen Sie den Kleingärtnern mit einem geeigneten statistischen Test: Bringt das neue Mittel zur Schädlingsbekämpfung auf einem Signifikanzniveau von 5% eine signifikante Verringerung des Befalls?

Aufgabe 3

Bei einem Feldversuch wurden vier verschiedene Düngemittel für Kürbisse untersucht. Von 20 getesteten Pflanzen wurden jeweils fünf mit einem der Düngemittel behandelt. Nach der Ernte wurden dann die Gewichte der einzelnen Kürbisse in den Testgruppen gemessen. Dabei ergaben sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten Gewichte W_{ij} (in kg). Die Messwerte innerhalb einer Stichprobe können als normalverteilt mit jeweils der gleichen Standardabweichung σ angenommen werden.

Düngemittel i	Pflanze j				
	1	2	3	4	5
A	10,0	9,5	9,0	10,8	9,8
B	10,8	11,5	12,0	11,0	12,4
C	12,5	12,5	13,2	12,0	11,5
D	9,0	9,1	10,5	10,1	10,3

Prüfen Sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob sich die erzielten Erntegewichte signifikant unterscheiden (Signifikanzniveau = 0,05).

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f\ ,\ f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \quad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese) Ist

   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \quad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1;1-\alpha}^2$$

Varianzanalyse

Mit der Varianzanalyse kann geprüft werden, ob verschiedene Stichproben zu einer Grundgesamtheit gehören.

- Die Nullhypothese H_0 lautet: Alle Stichproben haben den gleichen Erwartungswert.
- Die Alternativhypothese H_1 lautet: Es gibt mindestens zwei Stichproben a, b mit $\mu_a \neq \mu_b$

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{total} = SQZ + SQI$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{x}_j - \overline{x})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2$$

k: Anzahl Stichproben

n_j: Anzahl Wiederholungen innerhalb der Stichproben

$n = \sum_{j=1}^{k} n_j$: Gesamtanzahl der Messwerte

1. Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQI innerhalb der Stichproben:

   $$SQI = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x}_j)^2$$

2. Berechnung der mittleren Quadratsummen MQI innerhalb der Stichproben:

   $$MQI = \frac{SQI}{n - k}$$

   Analog zur Berechnung der Streuungen wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekannten Mittelwerten sind das n – k unabhängige Elemente.

3. Berechnung der Summe der Abweichungsquadrate SQZ zwischen den Stichproben:

   $$SQZ = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{x}_j - \overline{x})^2$$

   mit

   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j \overline{x}_j$$

4. Berechnung der mittleren Quadratsumme MQZ zwischen den Stichproben:

   $$MQZ = \frac{SQZ}{k - 1}$$

   Analog zur Berechnung der Streuung wird auf die Anzahl der Freiheitsgrade Bezug genommen. Bei bekanntem Mittelwert sind das k – 1 unabhängige Elemente.

5. Berechnung der Testgröße:

   $$F = \frac{MQZ}{MQI}$$

   Die Testgröße F soll bei Zutreffen der Hypothese H_0 einer F-Verteilung genügen. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $f_1 = k - 1$ und $f_2 = n - k$.

6. Bestimmung der Grenze anhand der F-Verteilung zum Signifikanzniveau α:

   $$F_{k-1;n-k;1-\alpha}$$

   Dieser so genannte kritische Wert wird aus Tabellen entnommen.

7. H_0 wird abgelehnt sobald gilt:

   $$F > F_{k-1;n-k;1-\alpha}$$

   Anderenfalls besteht kein Anlass, H_0 zu verwerfen.

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,7	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,93
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,06
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,15	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82
24	1,71	2,06	2,49	2,80
26	1,71	2,06	2,48	2,78
28	1,70	2,05	2,47	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
100	1,66	1,98	2,37	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10
1	$3{,}9\cdot10^{-5}$	$1{,}6\cdot10^{-4}$	$9{,}8\cdot10^{-4}$	$3{,}9\cdot10^{-3}$	$1{,}6\cdot10^{-2}$
2	$1{,}0\cdot10^{-2}$	$2{,}0\cdot10^{-2}$	$5{,}1\cdot10^{-2}$	0,103	0,211
3	$7{,}2\cdot10^{-2}$	$1{,}1\cdot10^{-1}$	0,216	0,352	0,584
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7
60	35,5	37,5	40,5	43,2	46,5
70	43,3	45,4	48,8	51,7	55,3
80	51,2	53,5	57,2	60,4	64,3
90	59,2	61,8	65,6	69,1	73,3
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7
6	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

90%-Quantile $F_{r,\,s,\,0{,}90}$ der F-Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	61,22	61,74
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,42	9,44
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,20	5,18
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,87	3,84
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,24	3,21
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,87	2,84
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,63	2,59
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,46	2,42
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,34	2,30
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,24	2,20
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,10	2,06
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,01	1,96
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,94	1,89
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,89	1,84
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,84	1,79
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,72	1,67
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,66	1,61
50	2,81	2,41	2,20	2,06	1,97	1,90	1,84	1,80	1,76	1,73	1,63	1,57
100	2,76	2,36	2,14	2,00	1,91	1,83	1,78	1,73	1,69	1,66	1,56	1,49
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,49	1,42

95%-Quantile $F_{r,\,s,\,0{,}95}$ der F-Verteilung

s \ r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95	248,01
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,67	1,57