Institut für Produktionsmesstechnik
Technische Universität Braunschweig

Klausur

Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

2.7.2010

Name: . . . .

Matrikel-Nr.: . . . .

Aufgabe	Kurzfragen	1	2	Gesamt
Punkte				

Kurzfragen

1. Ein Eisverkäufer erziehlt bei schönem Wetter einen Tagesgewinn von 500 EUR, bei Regen von 100 EUR und bei Schneefall macht er 150 EUR Verlust. Die Wahrscheinlichkeit für schönes Wetter sei $P(S) = 0,6$ und für Regen $P(R) = 0,3$. Wie hoch ist der Erwartungswert des täglichen Gewinns für den Eisverkäufer?

2. Aus welchen Elementen besteht ein vollständiges Messergebnis?

3. Welche elementaren Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit eine Größe gemessen werden kann?

4. Welche Operationen sind mit ordinal skalierten Merkmalen sinnvoll durchführbar?

5. Was ist der Modalwert (Modus) einer Verteilung?

6. Welcher Anteil der Messabweichung kann durch Kalibrieren korrigiert werden?

7. Was versteht man unter verbundenen Stichproben?

8. Ist es sinnvoll, bei einem statistischen Test generell ein sehr kleines Signifikanzniveau vorzugeben? Begründen Sie ihre Aussage!

Aufgabe 1.

Paul hat den Verdacht, dass mit seiner Laborwaage etwas nicht stimmt und möchte daher überprüfen, ob sie neu kalibriert oder evtl. sogar repariert werden muss. Hierfür steht ihm ein Wägestück mit 100 g der Fehlerklasse E2 zur Verfügung. D.h., der maximale Fehler dieses Wägestücks ist kleiner als 0,15 mg und damit kleiner als der spezifizierte Fehler der Waage. Seine Masse kann daher als exakt angenommen werden.

Das Wägestück wurde acht mal gewogen und dabei folgende Massen bestimmt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse / g	99,976	99,981	99,975	99,979	100,010	100,013	99,980	99,992

Überprüfen Sie mit einem geeigneten Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, ob Pauls Vermutung gerechtfertigt ist!

(Für diese Stichprobe kann eine Normalverteilung angenommen werden.)

Aufgabe 2.

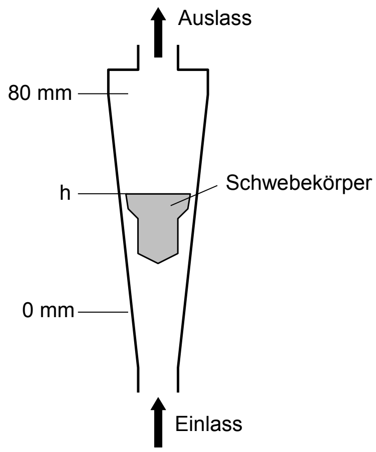


Bild 1: Prinzip des Druchflussmessgerätes

Schwebekörper-Durchflussmessgeräte werden aufgrund ihrer Robustheit in vielen Bereichen eingesetzt. In ihnen befindet sich ein Schwebekörper in einem senkrechten Rohr mit leicht konischem, nach oben größer werdendem Querschnitt. Der Schwebekörper wird von unten von dem zu messenden Medium umströmt (Bild 1). Auf ihn wirken hierbei seine Gewichtskraft und die Kaft, die die Strömung auf ihn ausübt. Diese Anströmkraft ist vorwiegend abhängig von dem freien Strömungsquerschnitt zwischen Schwebekörper und Wandung, so dass sich bei einer bestimten Position im Rohr ein Kräftegleichgewicht einstellt, an der der Schwebekörper dann verharrt. Diese Position h ist dann ein Maß für den Durchfluss. Da aber auch andere Größen, wie z.B. die Viskosität des Mediums, die Anströmkraft beeinflussen, müssen die Schwebekörper-Durchflussmessgeräte für das jeweilige Medium kalibriert werden.

Für eine zu untersuchende Flüssigkeit wurde dieses in geeigneter Weise getan und es ergaben sich dabei folgende Messwerte:

Messung Nr.	1	2	3	4	5	6
Durchfluss / (Liter/ h)	17,2	47,5	67,7	93,6	119,2	148,8
Position h / mm	5,5	20,0	37,5	51,5	67,0	82,5

Die grafische Darstellung dieser Messwerte lässt einen linearen Zusammenhang zwischen den Größen vermuten. Deshalb soll für diese ermittelten Werte eine Regressionsgerade bestimmt werden.

a) Berechnen Sie den Regressionskoeffizienten b und seinen Vertrauensbereich für eine Aussagesicherheit von $P = 95\,\%$. Der Durchfluss sei hierbei die von der Position abhängige Größe.

b) Berechnen Sie mittels linearer Regression den Durchfluss bei einer Schwebekörperposition von 50 mm inklusive des zugehörigen Vertrauensbereichs für eine statistische Sicherheit von $P = 95\,\%$.

Anmerkung: Für die ermittelten Stichproben kann eine Normalverteilung angenommen werden.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f \ , \ f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2} \ , \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s_x^2+s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \; ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \; ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,\dots x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,\dots x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,\dots x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

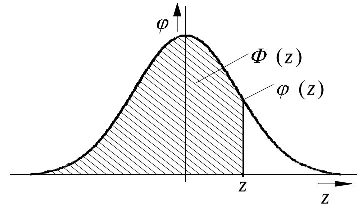
$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

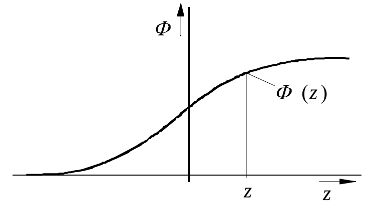
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,7	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,93
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,06
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,15	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82
24	1,71	2,06	2,49	2,80
26	1,71	2,06	2,48	2,78
28	1,70	2,05	2,47	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
100	1,66	1,98	2,37	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,65	1,96	2,33	2,58