Institut für Produktionsmesstechnik
Technische Universität Braunschweig

Klausur

Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

12.3.2010

Name: . . . .

Matrikel-Nr.: . . . .

Aufgabe	Kurzfragen	1	2	Gesamt
Punkte				

Kurzfragen

1. Man unterscheidet zwei Arten von äußeren Störungen. Welche sind das? Geben Sie jeweils ein Beispiel an.

2. Wie groß ist jeweils die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion

   a) für eine Poissonverteilung $Po(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ mit dem Parameter $\lambda = 1$

   b) für eine Gaußsche Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 2$

3. Welche Beziehung besteht zwischen relativer Häufigkeitsdichte und absoluter Häufigkeit?

4. Beim Messen wird das Messobjekt immer durch die Messung beeinflusst. Wie kann diese Beeinflussung berücksichtigt werden, wenn sie nicht vernachlässigbar ist?

5. Wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung liegen zwischen dem ersten (Q1) und dem dritten Quartil (Q3)?

6. Welche statistische Problemstellung kann man mittels einer einfachen Varianzanalyse (ANOVA) lösen?

7. Was versteht man unter intensiven Messgrößen? Nennen Sie ein Beispiel!

Aufgabe 1.

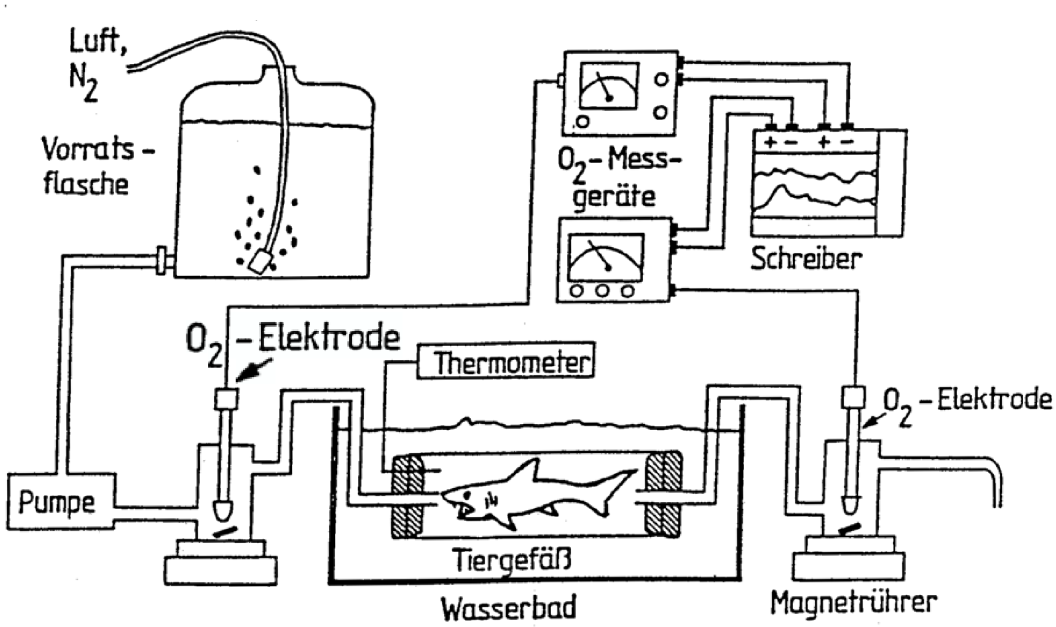


Bild 1: Versuchsaufbau Messung des Sauerstoffverbrauchs

Es soll der Energieumsatz von Fischen untersucht werden. Dieses erfolgt indirekt über die Messung des Sauerstoffverbrauchs. Bild 1 zeigt den hierfür verwendeten Versuchsaufbau. Der Fisch befindet sich in einem Gefäß, welches von Wasser durchströmt wird. Das Wasser wird mittels einer geregelten Pumpe mit integriertem Durchflussmesser von einem Vorratsbehälter in das Tiergefäß gepumpt. Vor und nach dem Gefäß wird der Sauerstoffgehalt des Wassers mittels zweier Clark-Elektroden gemessen. Aus der Differenz der Sauerstoffgehalte, dem Volumenstrom des Wassers und der Masse des Tieres lässt sich der relative Sauerstoffverbrauch folgendermaßen bestimmen:

$$V_{O_2} = \frac{(p_1 - p_2) \cdot F \cdot U}{M} \qquad (\mathrm{ml} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{h}^{-1})$$

p_1: Sauerstoffgehalt vor dem Gefäß (mg/ l)
p_2: Sauerstoffgehalt nach dem Gefäß (mg/ l)
F: Volumenstrom des Wassers (l/ h)
U: Umrechnungsfaktor von mg O_2 in ml O_2 (1 Mol $O_2 = 32\,\mathrm{g} = 22,4\,\mathrm{l}$)
M: Masse des Fisches (g)
V_{O_2}: relativer Sauerstoffverbrauch ($\mathrm{ml} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{h}^{-1}$)

Für einen jungen Karpfen wurde nun eine Messung seines Sauerstoffverbrauchs durchgeführt. Die Masse M des Fisches wurde durch sechsmaliges Wiegen bestimmt. Die folgende Tabelle enthält die ermittelten Werte:

n :	1	2	3	4	5	6
M/ g :	251,3	250,9	251,0	251,4	251,1	251,0

Die Volumenstrom F des Wassers beträgt 6 l/ h (Liter pro Stunde). Der Hersteller der Pumpe bescheinigt ihr eine Unsicherheit der Fördermenge von 0,66 % der Sollfördermenge für eine statistische Sicherheit von 95 % ($n \to \infty$).

Die Sauerstoffgehalte wurden mit $p_1 = 9,3\,\mathrm{mg/l}$ und $p_2 = 3,7\,\mathrm{mg/l}$ ermittelt. Die Messunsicherheit der Clark-Elektroden und der zugehörigen Auswerteelektronik ist in vorhergehenden Untersuchungen bestimmt worden und beträgt 1,3 % des angezeigten Messwertes (P=99 %).

Berechnen Sie das vollständige Messergebnis für den relativen Sauerstoffverbrauch (in $\mathrm{ml} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{h}^{-1}$) für eine statistische Sicherheit von P=99 %.

(Hinweis: für sämtliche Messgrößen kann eine Normalverteilung angenommen werden.)

Aufgabe 2.

Mit dem in Aufgabe 1 beschriebenen Versuchsaufbau soll untersucht werden, ob der Energiegrundumsatz von Fischen vom Sauerstoffgehalt des umgebenden Wassers abhängt. Hierfür wird der Sauerstoffverbrauch von sieben Fischen verschiedener Art in zwei Durchläufen ermittelt. Im ersten beträgt der Sauerstoffgehalt des zugeführten Wassers 9,5 mg/ l, im zweiten 7,1 mg/ l. An jedem Fisch werden beide Messungen durchgeführt. Die sonstigen Versuchsbedingungen bleiben bei beiden Durchläufen konstant. Es wurden folgende Differenzen des Sauerstoffgehalts D_h und D_n ($D = p_1 - p_2$) für den hohen und niedrigen Sauerstoffgehalt ermittelt:

Fisch Nr.:	1	2	3	4	5	6	7
D_h / (mg/ l) :	3,1579	2,4558	2,9610	2,0513	2,8500	3,2284	2,8175
D_n / (mg/ l) :	3,1143	2,3050	3,0086	2,0341	2,6865	3,1588	2,8459

Überprüfen Sie mit einem geeigneten Testverfahren auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, ob der Sauerstoffverbrauch der Fische vom Sauerstoffgehalt des Wassers abhängt oder nicht.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \,,\; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2} \,, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \,,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \,,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

$$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \,,$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist

   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \; ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \; ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

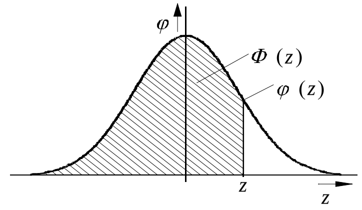
$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

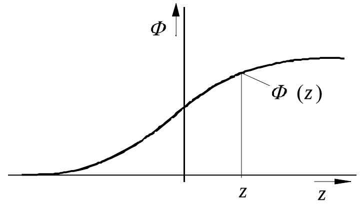
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,7	31,8	63,7
2	2,92	4,30	6,97	9,93
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,37	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,90	2,37	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,06
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,15	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,73	2,09	2,53	2,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82
24	1,71	2,06	2,49	2,80
26	1,71	2,06	2,48	2,78
28	1,70	2,05	2,47	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
100	1,66	1,98	2,37	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,65	1,96	2,33	2,58