# Klausur
# Einführung in die statistische Messdatenauswertung für Biotechnologen

# 3.7.2009

## Kurzfragen

1. Wie wird prinzipiell die relative Summenhäufigkeit $S(x)$ aus der relativen Häufigkeitsdichte $h(x)$ bestimmt?

2. Welches Skalenniveau müssen zwei Merkmale haben, um eine Regressionsgerade berechnen zu können, die den Zusammenhang zwischen beiden beschreibt. Begründen Sie ihre Angabe!

3. Worin besteht der Unterschied zwischen Kalibrieren und Eichen?

4. Die Länge eines Glasröhrchens wird 5 mal gemessen. Hierbei ergibt sich eine Länge von 80 mm und ein Vertrauensbereich von $\pm 0,1$ mm. Wie oft muss die Messung durchgeführt werden, um einen Vertrauensbereich zu halbieren?

5. Geben Sie je ein Beispiel für ein Ausschlagsverfahren und ein Kompensationsverfahren zur Bestimmung der Masse an!

6. Bei einem statistischen Test wird eine Hypothese $H_0$ aufgestellt. Welche beiden Arten der Fehlentscheidung können bei der Auswertung des Tests auftreten? Erläutern Sie diese!

7. Was ist der Zusammenhang zwischen wahrem und richtigem Wert einer Messung?

8. An welchen Stellen befinden sich die Wendepunkte der Gaußschen Normalverteilung?

**Aufgabe 1.**
Bei der Herstellung von Messpipetten werden zur Qualitätssicherung aus der laufenden Fertigung regelmäßig Stichproben entnommen (normalverteilt). Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 15$ ergaben sich für den Innendurchmesser an einer definierten Stelle folgende Werte in mm:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,651 | 9,662 | 9,670 | 9,629 | 9,643 | 9,669 | 9,655 | 9,661 |
| 9,681 | 9,649 | 9,638 | 9,652 | 9,611 | 9,646 | 9,631 | |

1. Berechnen Sie die besten Schätzwerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung des Fertigungsprozesses.

2. Wieviel Prozent der insgesamt gefertigten Werkstücke haben einen Durchmesser zwischen 9,640 mm und 9,670 mm?

3. Welche Standardabweichung darf der Prozess maximal haben, damit maximal 2 % der Werkstücke größer als 9,670 mm sind? Der Mittelwert sei hierbei aus Aufgabenteil 1 exakt bekannt und als konstant anzusehen.

**Aufgabe 2.**
Von 18 etwa gleichgroßen Getreidefeldern wurden $n_1 = 5$ mit dem Düngemittel $D1$, $n_2 = 7$ mit dem Düngemittel $D_2$ und $n_3 = 6$ mit dem Düngemittel $D_3$ gedüngt. Die Ernteerträge der entsprechenden Felder (in kg) sind in der folgenden Tabelle angegeben:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | 781 | 655 | 611 | 789 | 596 | | |
| $D_2$ | 545 | 786 | 976 | 663 | 790 | 568 | 720 |
| $D_3$ | 696 | 660 | 639 | 467 | 650 | 380 | |

Überprüfen Sie mittels ANOVA die Annahme, dass die drei Düngemittel im Mittel zu den gleichen Ernteerträgen führen (Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$)

**Aufgabe 3.**
Herr K. aus B. behauptet, dass die Punktzahl X von Biotechnologiestudenten in der Statistikklausur eine *kryptonormative Polydiskriminalverteilung* hat, die, wie allgemein nicht bekannt ist, folgendermaßen aussieht:

| Klausurpunktzahl x | $0 < x \leq 30$ | $30 < x \leq 50$ | $50 < x \leq 70$ | $70 < x \leq 100$ |
|---|---|---|---|---|
| $H_t(x_j) = h_t(x_j) \cdot \Delta x$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

In einer Klausur mit 100 Teilnehmern ergibt sich nun folgende Punkteverteilung:

| Klausurpunktzahl x | $0 < x \leq 30$ | $30 < x \leq 50$ | $50 < x \leq 70$ | $70 < x \leq 100$ |
|---|---|---|---|---|
| $n(x_j)$ | 6 | 15 | 39 | 40 |

Kann Herr K.'s Behauptung bei einem Signifikanzniveau von 5 % als statistisch gesichert gelten?

## *Elementare statistische Maßzahlen*

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

## *Konfidenzintervall*

Die Messgröße $X$ sei normalverteilt, $\sigma$ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße $X$ sei normalverteilt, $\sigma$ sei unbekannt.

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

## *Lineare Regression*

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren $(x_i, y_i)$ nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für $\sigma^2$ ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2$$

$$= \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung $s_x$ aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – $\alpha$ beträgt:

   $$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert $\beta$ für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten $x$-Wert $x^*$ der $y$-Wert

   $$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

   zugeordnet. Der Vertrauensbereich für $y^*$ zur statistischen Sicherheit P = 1 – $\alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

## *Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler*

$f$ sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für $f$ mit statistischer Sicherheit P = 1 – $\alpha$:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \, , \; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n} c_{x_i}\right)^2} \quad , \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

## *t-Test*

**t-Test für Erwartungswert**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau $\alpha$:

1. $H_0$: $\mu_x = \mu_0$ gegen $H_1$: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha} \, ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
2. $H_0$: $\mu_x = \mu_0$ gegen $H_1$: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

   $$t_0 > t_{n-1;1-\alpha} \, ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
3. $H_0$: $\mu_x = \mu_0$ gegen $H_1$: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \, ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.

**t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte**

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau $\alpha$:

1. $H_0$: $\mu_x = \mu_y$ gegen $H_1$: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
2. $H_0$: $\mu_x = \mu_y$ gegen $H_1$: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
3. $H_0$: $\mu_x = \mu_y$ gegen $H_1$: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist

   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.

**t-Test für verbundene Stichproben**

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau $\alpha$:

1. $H_0$: $\mu_d = 0$ gegen $H_1$: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \, ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
2. $H_0$: $\mu_d = 0$ gegen $H_1$: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.
3. $H_0$: $\mu_d = 0$ gegen $H_1$: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \, ,$$

   wird $H_0$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha$ abgelehnt.

## *Der $\chi$2-Test für Verteilungsfunktionen*

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein $\chi$2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese $H_0$: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen $T_i$, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl $B_i$ von Messwerten in der Klasse $T_i$
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. $\mu$ und $\sigma$ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit $p_i$, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall $T_i$ zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse $T_i$ bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha$

$H_0$ ist abzulehnen mit Signifikanzniveau $\alpha$, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

## *Varianzanalyse*

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{total} = SQZ + SQI$$

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2$$

***k:*** Anzahl Behandlungen (Gruppen)

***$n_j$:*** Anzahl Wiederholungen (in Gruppen)

***$n=k*n_j$*** (vollkommen randomisierte Versuchsanlage)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} \qquad \bar{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$$

Mittlere Quadratsummen:

$$MQZ = \frac{SQZ}{FGZ} = \frac{SQZ}{k-1}$$

$$MQI = \frac{SQI}{FGI} = \frac{SQI}{n-k}$$

Die Testgröße:

$$F_0 = \frac{MQZ}{MQI}$$

Kritischer Wert:

$$F_{kritisch} = F_{FGZ;FGI;1-\alpha}$$

Die Entscheidung:

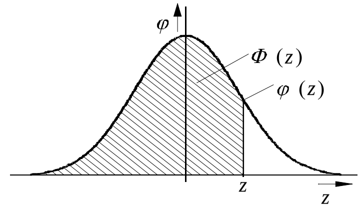
Hypothese $H_0$ wird angenommen falls $F_0 < F_{kritisch}$

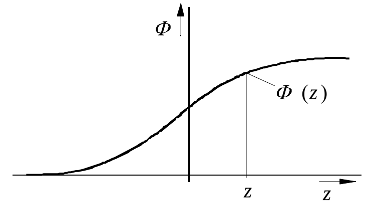
**Tabelle 1**

# Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$




| z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,500000 | 0,503989 | 0,507978 | 0,511966 | 0,515953 | 0,519939 | 0,523922 | 0,527903 | 0,531881 | 0,535856 | 0,0 |
| 0,1 | 0,539828 | 0,543795 | 0,547758 | 0,551717 | 0,555670 | 0,559618 | 0,563559 | 0,567495 | 0,571424 | 0,575345 | 0,1 |
| 0,2 | 0,579260 | 0,583166 | 0,587064 | 0,590954 | 0,594835 | 0,598706 | 0,602568 | 0,606420 | 0,610261 | 0,614092 | 0,2 |
| 0,3 | 0,617911 | 0,621720 | 0,625516 | 0,629300 | 0,633072 | 0,636831 | 0,640576 | 0,644309 | 0,648027 | 0,651732 | 0,3 |
| 0,4 | 0,655422 | 0,659097 | 0,662757 | 0,666402 | 0,670031 | 0,673645 | 0,677242 | 0,680822 | 0,684386 | 0,687933 | 0,4 |
| 0,5 | 0,691462 | 0,694974 | 0,698468 | 0,701944 | 0,705401 | 0,708840 | 0,712260 | 0,715661 | 0,719043 | 0,722405 | 0,5 |
| 0,6 | 0,725747 | 0,729069 | 0,732371 | 0,735653 | 0,738914 | 0,742154 | 0,745373 | 0,748571 | 0,751748 | 0,754903 | 0,6 |
| 0,7 | 0,758036 | 0,761148 | 0,764238 | 0,767305 | 0,770350 | 0,773373 | 0,776373 | 0,779350 | 0,782305 | 0,785236 | 0,7 |
| 0,8 | 0,788145 | 0,791030 | 0,793892 | 0,796731 | 0,799546 | 0,802337 | 0,805105 | 0,807850 | 0,810570 | 0,813267 | 0,8 |
| 0,9 | 0,815940 | 0,818589 | 0,821214 | 0,823814 | 0,826391 | 0,828944 | 0,831472 | 0,833977 | 0,836457 | 0,838913 | 0,9 |
| 1,0 | 0,841345 | 0,843752 | 0,846136 | 0,848495 | 0,850830 | 0,853141 | 0,855428 | 0,857690 | 0,859929 | 0,862143 | 1,0 |
| 1,1 | 0,864334 | 0,866500 | 0,868643 | 0,870762 | 0,872857 | 0,874928 | 0,876976 | 0,879000 | 0,881000 | 0,882977 | 1,1 |
| 1,2 | 0,884930 | 0,886861 | 0,888768 | 0,890651 | 0,892512 | 0,894350 | 0,896165 | 0,897958 | 0,899727 | 0,901475 | 1,2 |
| 1,3 | 0,903200 | 0,904902 | 0,906582 | 0,908241 | 0,909877 | 0,911492 | 0,913085 | 0,914657 | 0,916207 | 0,917736 | 1,3 |
| 1,4 | 0,919243 | 0,920730 | 0,922196 | 0,923641 | 0,925066 | 0,926471 | 0,927855 | 0,929219 | 0,930563 | 0,931888 | 1,4 |
| 1,5 | 0,933193 | 0,934478 | 0,935745 | 0,936992 | 0,938220 | 0,939429 | 0,940620 | 0,941792 | 0,942947 | 0,944083 | 1,5 |
| 1,6 | 0,945201 | 0,946301 | 0,947384 | 0,948449 | 0,949497 | 0,950529 | 0,951543 | 0,952540 | 0,953521 | 0,954486 | 1,6 |
| 1,7 | 0,955435 | 0,956367 | 0,957284 | 0,958185 | 0,959070 | 0,959941 | 0,960796 | 0,961636 | 0,962462 | 0,963273 | 1,7 |
| 1,8 | 0,964070 | 0,964852 | 0,965620 | 0,966375 | 0,967116 | 0,967843 | 0,968557 | 0,969258 | 0,969946 | 0,970621 | 1,8 |
| 1,9 | 0,971283 | 0,971933 | 0,972571 | 0,973197 | 0,973810 | 0,974412 | 0,975002 | 0,975581 | 0,976148 | 0,976705 | 1,9 |
| 2,0 | 0,977250 | 0,977784 | 0,978308 | 0,978822 | 0,979325 | 0,979818 | 0,980301 | 0,980774 | 0,981237 | 0,981691 | 2,0 |
| 2,1 | 0,982136 | 0,982571 | 0,982997 | 0,983414 | 0,983823 | 0,984222 | 0,984614 | 0,984997 | 0,985371 | 0,985738 | 2,1 |
| 2,2 | 0,986097 | 0,986447 | 0,986791 | 0,987126 | 0,987455 | 0,987776 | 0,988089 | 0,988396 | 0,988696 | 0,988989 | 2,2 |
| 2,3 | 0,989276 | 0,989556 | 0,989830 | 0,990097 | 0,990358 | 0,990613 | 0,990863 | 0,991106 | 0,991344 | 0,991576 | 2,3 |
| 2,4 | 0,991802 | 0,992024 | 0,992240 | 0,992451 | 0,992656 | 0,992857 | 0,993053 | 0,993244 | 0,993431 | 0,993613 | 2,4 |
| 2,5 | 0,993790 | 0,993963 | 0,994132 | 0,994297 | 0,994457 | 0,994614 | 0,994766 | 0,994915 | 0,995060 | 0,995201 | 2,5 |
| 2,6 | 0,995339 | 0,995473 | 0,995604 | 0,995731 | 0,995855 | 0,995975 | 0,996093 | 0,996207 | 0,996319 | 0,996427 | 2,6 |
| 2,7 | 0,996533 | 0,996636 | 0,996736 | 0,996833 | 0,996928 | 0,997020 | 0,997110 | 0,997197 | 0,997282 | 0,997365 | 2,7 |
| 2,8 | 0,997445 | 0,997523 | 0,997599 | 0,997673 | 0,997744 | 0,997814 | 0,997882 | 0,997948 | 0,998012 | 0,998074 | 2,8 |
| 2,9 | 0,998134 | 0,998193 | 0,998250 | 0,998305 | 0,998359 | 0,998411 | 0,998462 | 0,998511 | 0,998559 | 0,998605 | 2,9 |

| z | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 | z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Φ(z) | $1-1{,}350\cdot10^{-3}$ | $1-2{,}326\cdot10^{-4}$ | $1-3{,}167\cdot10^{-5}$ | $1-3{,}398\cdot10^{-6}$ | $1-2{,}867\cdot10^{-7}$ | $1-9{,}866\cdot10^{-10}$ | $1-1{,}280\cdot10^{-12}$ | $1-6{,}221\cdot10^{-16}$ | $1-1{,}129\cdot10^{-19}$ | $1-7{,}620\cdot10^{-24}$ | Φ(z) |

| Φ(z) | 50% | 60% | 70% | 80% | 90% | 95% | 97,5% | 99% | 99,5% | 99,75% | 99,9% | 99,95% | Φ(z) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 0 | 0,253 | 0,524 | 0,842 | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,326 | 2,576 | 2,807 | 3,090 | 3,291 | z |

## p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

| s \ p | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,31 | 12,7 | 31,8 | 63,7 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,93 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 |
| 5 | 2,02 | 2,57 | 3,37 | 4,03 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 |
| 7 | 1,90 | 2,37 | 3,00 | 3,50 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,06 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 |
| 14 | 1,76 | 2,15 | 2,62 | 2,98 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,47 | 2,76 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 |
| 50 | 1,68 | 2,01 | 2,40 | 2,68 |
| 100 | 1,66 | 1,98 | 2,37 | 2,63 |
| 200 | 1,65 | 1,97 | 2,35 | 2,60 |
| $\infty$ | 1,65 | 1,96 | 2,33 | 2,58 |

## p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der $\chi^2$-Verteilung mit s Freiheitsgraden

| s \ p | 0,90 | 0,95 | 0,975 | 0,99 | 0,995 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,71 | 3,84 | 5,02 | 6,63 | 7,88 |
| 2 | 4,61 | 5,99 | 7,38 | 9,21 | 10,6 |
| 3 | 6,25 | 7,81 | 9,35 | 11,3 | 12,8 |
| 4 | 7,78 | 9,49 | 11,1 | 13,3 | 14,9 |
| 5 | 9,24 | 11,1 | 12,8 | 15,1 | 16,8 |
| 6 | 10,6 | 12,6 | 14,5 | 16,8 | 18,6 |
| 7 | 12,0 | 14,1 | 16,0 | 18,5 | 20,3 |
| 8 | 13,4 | 15,5 | 17,5 | 20,1 | 22,0 |
| 9 | 14,7 | 16,9 | 19,0 | 21,7 | 23,6 |
| 10 | 16,0 | 18,3 | 20,5 | 23,2 | 25,2 |
| 11 | 17,3 | 19,7 | 21,9 | 24,7 | 26,8 |
| 12 | 18,6 | 21,0 | 23,3 | 26,2 | 28,3 |
| 13 | 19,8 | 22,4 | 24,7 | 27,7 | 29,8 |
| 14 | 21,2 | 23,7 | 26,1 | 29,1 | 31,3 |
| 15 | 22,3 | 25,0 | 27,5 | 30,6 | 32,8 |
| 16 | 23,5 | 26,3 | 28,9 | 32,0 | 34,3 |
| 17 | 24,8 | 27,6 | 30,2 | 33,4 | 35,7 |
| 18 | 26,0 | 28,9 | 31,5 | 34,8 | 37,2 |
| 19 | 27,2 | 30,1 | 32,9 | 36,2 | 38,6 |
| 20 | 28,4 | 31,4 | 34,2 | 37,6 | 40,0 |
| 21 | 29,6 | 32,7 | 35,5 | 38,9 | 41,4 |
| 22 | 30,8 | 33,9 | 36,8 | 40,3 | 42,8 |
| 23 | 32,0 | 35,2 | 38,1 | 41,6 | 44,2 |
| 24 | 33,2 | 36,4 | 39,4 | 43,0 | 45,6 |
| 25 | 34,4 | 37,7 | 40,6 | 44,3 | 46,9 |
| 26 | 35,6 | 38,9 | 41,9 | 45,6 | 48,3 |
| 27 | 36,7 | 40,1 | 43,2 | 47,0 | 49,6 |
| 28 | 37,9 | 41,3 | 44,5 | 48,3 | 51,0 |
| 29 | 39,1 | 42,6 | 45,7 | 49,6 | 52,3 |
| 30 | 40,3 | 43,8 | 47,0 | 50,9 | 53,7 |
| 40 | 51,8 | 55,8 | 59,3 | 63,7 | 66,8 |
| 50 | 63,2 | 67,5 | 71,4 | 76,2 | 79,5 |
| 60 | 74,4 | 79,1 | 83,3 | 88,4 | 92,0 |
| 70 | 85,5 | 90,5 | 95,0 | 100,4 | 104,2 |
| 80 | 96,6 | 101,9 | 106,6 | 112,3 | 116,3 |
| 90 | 107,6 | 113,1 | 118,1 | 124,1 | 128,3 |
| 100 | 118,5 | 124,3 | 129,6 | 135,8 | 140,2 |

## 90 %-Quantile $F_{r,s,\,0,9}$ der F - Verteilung

| s \ r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39,86 | 49,50 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,20 | 58,91 | 59,44 | 59,86 | 60,19 | 61,22 | 61,74 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 | 9,38 | 9,39 | 9,42 | 9,44 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 | 5,24 | 5,23 | 5,20 | 5,18 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 | 3,94 | 3,92 | 3,87 | 3,84 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,24 | 3,21 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,87 | 2,84 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 | 2,72 | 2,70 | 2,63 | 2,59 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,46 | 2,42 |
| 9 | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,51 | 2,47 | 2,44 | 2,42 | 2,34 | 2,30 |
| 10 | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,32 | 2,24 | 2,20 |
| 12 | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,10 | 2,06 |
| 14 | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,10 | 2,01 | 1,96 |
| 16 | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 | 2,03 | 1,94 | 1,89 |
| 18 | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,98 | 1,89 | 1,84 |
| 20 | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,96 | 1,94 | 1,84 | 1,79 |
| 30 | 2,88 | 2,49 | 2,28 | 2,14 | 2,05 | 1,98 | 1,93 | 1,88 | 1,85 | 1,82 | 1,72 | 1,67 |
| 40 | 2,84 | 2,44 | 2,23 | 2,09 | 2,00 | 1,93 | 1,87 | 1,83 | 1,79 | 1,76 | 1,66 | 1,61 |
| 50 | 2,81 | 2,41 | 2,20 | 2,06 | 1,97 | 1,90 | 1,84 | 1,80 | 1,76 | 1,73 | 1,63 | 1,57 |
| 100 | 2,76 | 2,36 | 2,14 | 2,00 | 1,91 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,69 | 1,66 | 1,56 | 1,49 |
| ∞ | 2,71 | 2,30 | 2,08 | 1,95 | 1,85 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,63 | 1,60 | 1,49 | 1,42 |

## 95 %-Quantile $F_{r,s,\,0,95}$ der F - Verteilung

| s \ r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 | 238,88 | 240,54 | 241,88 | 245,95 | 248,01 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,43 | 19,45 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,70 | 8,66 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,86 | 5,80 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,62 | 4,56 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 3,94 | 3,87 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,51 | 3,44 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,22 | 3,15 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,01 | 2,94 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,85 | 2,77 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,62 | 2,54 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,46 | 2,39 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,35 | 2,28 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,27 | 2,19 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,20 | 2,12 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,01 | 1,93 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 1,92 | 1,84 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,07 | 2,03 | 1,87 | 1,78 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,31 | 2,19 | 2,10 | 2,03 | 1,97 | 1,93 | 1,77 | 1,68 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,61 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,67 | 1,57 |

## 97,5 %-Quantile $F_{r,s,\,0{,}975}$ der F - Verteilung

| s \ r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647,79 | 799,50 | 864,16 | 899,58 | 921,85 | 937,11 | 948,22 | 956,66 | 963,28 | 968,63 | 984,87 | 993,10 |
| 2 | 38,51 | 39,00 | 39,17 | 39,25 | 39,30 | 39,33 | 39,36 | 39,37 | 39,39 | 39,40 | 39,43 | 39,45 |
| 3 | 17,44 | 16,04 | 15,44 | 15,10 | 14,88 | 14,73 | 14,62 | 14,54 | 14,47 | 14,42 | 14,25 | 14,17 |
| 4 | 12,22 | 10,65 | 9,98 | 9,60 | 9,36 | 9,20 | 9,07 | 8,98 | 8,90 | 8,84 | 8,66 | 8,56 |
| 5 | 10,01 | 8,43 | 7,76 | 7,39 | 7,15 | 6,98 | 6,85 | 6,76 | 6,68 | 6,62 | 6,43 | 6,33 |
| 6 | 8,81 | 7,26 | 6,60 | 6,23 | 5,99 | 5,82 | 5,70 | 5,60 | 5,52 | 5,46 | 5,27 | 5,17 |
| 7 | 8,07 | 6,54 | 5,89 | 5,52 | 5,29 | 5,12 | 4,99 | 4,90 | 4,82 | 4,76 | 4,57 | 4,47 |
| 8 | 7,57 | 6,06 | 5,42 | 5,05 | 4,82 | 4,65 | 4,53 | 4,43 | 4,36 | 4,30 | 4,10 | 4,00 |
| 9 | 7,21 | 5,71 | 5,08 | 4,72 | 4,48 | 4,32 | 4,20 | 4,10 | 4,03 | 3,96 | 3,77 | 3,67 |
| 10 | 6,94 | 5,46 | 4,83 | 4,47 | 4,24 | 4,07 | 3,95 | 3,85 | 3,78 | 3,72 | 3,52 | 3,42 |
| 12 | 6,55 | 5,10 | 4,47 | 4,12 | 3,89 | 3,73 | 3,61 | 3,51 | 3,44 | 3,37 | 3,18 | 3,07 |
| 14 | 6,30 | 4,86 | 4,24 | 3,89 | 3,66 | 3,50 | 3,38 | 3,29 | 3,21 | 3,15 | 2,95 | 2,84 |
| 16 | 6,12 | 4,69 | 4,08 | 3,73 | 3,50 | 3,34 | 3,22 | 3,12 | 3,05 | 2,99 | 2,79 | 2,68 |
| 18 | 5,98 | 4,56 | 3,95 | 3,61 | 3,38 | 3,22 | 3,10 | 3,01 | 2,93 | 2,87 | 2,67 | 2,56 |
| 20 | 5,87 | 4,46 | 3,86 | 3,51 | 3,29 | 3,13 | 3,01 | 2,91 | 2,84 | 2,77 | 2,57 | 2,46 |
| 30 | 5,57 | 4,18 | 3,59 | 3,25 | 3,03 | 2,87 | 2,75 | 2,65 | 2,57 | 2,51 | 2,31 | 2,20 |
| 40 | 5,42 | 4,05 | 3,46 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,62 | 2,53 | 2,45 | 2,39 | 2,18 | 2,07 |
| 50 | 5,34 | 3,97 | 3,39 | 3,05 | 2,83 | 2,67 | 2,55 | 2,46 | 2,38 | 2,32 | 2,11 | 1,99 |
| 100 | 5,18 | 3,83 | 3,25 | 2,92 | 2,70 | 2,54 | 2,42 | 2,32 | 2,24 | 2,18 | 1,97 | 1,85 |
| ∞ | 5,03 | 3,69 | 3,12 | 2,79 | 2,57 | 2,41 | 2,29 | 2,19 | 2,11 | 2,05 | 1,83 | 1,71 |

## 99 %-Quantile $F_{r,s,\,0{,}99}$ der F - Verteilung

| s \ r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.052,18 | 4.999,50 | 5.403,35 | 5.624,58 | 5.763,65 | 5.858,99 | 5.928,36 | 5.981,07 | 6.022,47 | 6.055,85 | 6.157,28 | 6.208,73 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,43 | 99,45 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 | 26,87 | 26,69 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 | 14,20 | 14,02 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 | 9,72 | 9,55 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,56 | 7,40 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,31 | 6,16 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,52 | 5,36 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 4,96 | 4,81 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,56 | 4,41 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,01 | 3,86 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,66 | 3,51 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,41 | 3,26 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,23 | 3,08 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 | 3,09 | 2,94 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,70 | 2,55 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,52 | 2,37 |
| 50 | 7,17 | 5,06 | 4,20 | 3,72 | 3,41 | 3,19 | 3,02 | 2,89 | 2,78 | 2,70 | 2,42 | 2,27 |
| 100 | 6,90 | 4,82 | 3,98 | 3,51 | 3,21 | 2,99 | 2,82 | 2,69 | 2,59 | 2,50 | 2,22 | 2,07 |
| ∞ | 6,64 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,04 | 1,88 |