

Klausur
Einführung in die statistische Messdatenauswertung für
Biotechnologen

20.3.2009

Kurzfragen

1. Ist die Aussage „Bei der Berechnung der Fehlerfortpflanzung für systematische Abweichungen können sich die einzelnen Abweichungsanteile durch unterschiedliche Vorzeichen teilweise kompensieren“ richtig oder falsch?
2. Was bedeutet der Begriff „Kalibrierung“?
3. Wie ist der Medianwert einer Menge von Messwerten definiert? Um welche Art von deskriptivem Parameter handelt es sich?
4. Welches Skalenniveau müssen die Merkmale haben, um einen Median berechnen zu können?
5. Welche zwei SI-Basiseinheiten sind redundant und worüber sind sie verknüpft?
6. Welche Angabe benötigt man zusätzlich zu Mittelwert und Streuung einer normalverteilten Stichprobe, um eine Aussage über den Vertrauensbereich mit statistischer Sicherheit 95 % dieser Stichprobe machen zu können?
7. Welchen Vorteil haben Kompensationsmessmethoden (Nullabgleichsmessmethoden) gegenüber Ausschlagsmessmethoden?
8. Das Shannontheorem beschreibt die Bedingungen, die bei der Abtastung eines Signals erfüllt sein müssen, um dieses vollständig rekonstruieren zu können. Eine dieser Bedingungen ist, dass das Signal „bandbegrenzt“ ist. Was bedeutet dieses? Nennen Sie ein Beispiel für ein idealerweise nicht bandbegrenzttes Signal.

Aufgabe 1.

Die Strömungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem kreisförmigen Rohr soll mittels eines Ultraschall-Laufzeitverfahrens gemessen werden. Bild 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Die Schallwandler sind im Winkel β zu der Längsrichtung des Rohres im Abstand d angeordnet. Es wird die Differenz der Laufzeiten je eines Schallimpulses in beide Richtungen gemessen. Die Geschwindigkeit des Mediums berechnet sich zu:

$$v = \frac{c^2}{2d \cdot \cos \beta} \cdot \Delta t$$

- v Geschwindigkeit der Flüssigkeit
- c Schallgeschwindigkeit innerhalb der Flüssigkeit
- d Abstand der Sensoren
- β Winkel der Sensorstrecke zur Flussrichtung
- Δt Laufzeitdifferenz

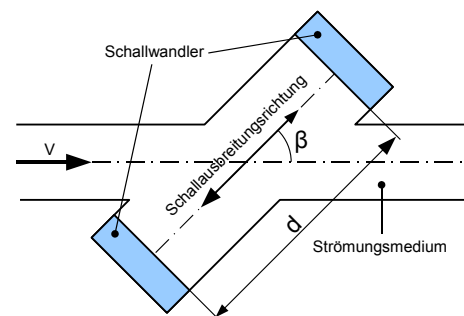


Bild1: Messprinzip

Der Winkel $\beta = 45^\circ$ sei exakt bekannt. Der Abstand d wird vom Hersteller der Messeinrichtung mit $100 \text{ mm} \pm 0,02 \text{ mm}$ ($P=99\%$) angegeben. Die Schallgeschwindigkeit wurde zuvor mit $c = 1484 \text{ m/s} \pm 0,9 \text{ m/s}$ ($P=95\%$) bestimmt (Stichprobenumfang $n = 10$). Für eine einzelne Messung werden folgende 7 Werte für Δt ermittelt (in Nanosekunden):

i	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta t / \text{ns}$	149,2	147,8	148,0	149,1	148,5	147,1	147,9

Geben Sie das vollständige Messergebnis für die Geschwindigkeit v für eine Aussagewahrscheinlichkeit von 99% an.

Aufgabe 2.

Unter einem Mikroskop wurden nacheinander 850 disjunkte Ausschnitte aus einer Zellkultur beobachtet und jeweils die Anzahl der Zellen bestimmt, die sich in einer bestimmten Phase der Zellteilung befinden. Die nachfolgende Tabelle gibt an, wie oft (y_i -mal) bei den 850 Beobachtungen genau i solcher Zellen registriert wurden.

i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	93	206	244	176	91	27	13

Testen Sie auf einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ die Hypothese, dass die Anzahl solcher Zellen in einem Ausschnitt durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable X beschrieben werden kann.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt (\bar{x}, \bar{y}) der Punkte:

$$(y - \bar{y}) = b(x - \bar{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j))^2$$

$$= \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 (1 - r_{xy}^2)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten x_1, \dots, x_n

3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{ns_x}}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{ns_x}} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x -Wert x^* der y -Wert

$$y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}}, y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{s_x^2}} \right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \dots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - c_f, f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + c_f \right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 < -t_{n-1, 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 > t_{n-1, 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_0$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

$$|t_0| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \quad (df = 2n - 2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 < -t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 > t_{n_x+n_y-2; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese) Ist

$$|t_0| > t_{n_x+n_y-2; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} \quad (df = n - 1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α :

1. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese) Ist

$$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. $H_0: \mu_d = 0$ gegen $H_1: \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese) Ist

$$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ^2 -Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ^2 -Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0 : X wird durch die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten x_1, \dots, x_n aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i , so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe x_1, \dots, x_n enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i .
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion $h(x)$ Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten x_1, \dots, x_n abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i , mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte $h(x)$ unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte $h(x)$ darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r^* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
 - r^* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
 - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
 - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α , wenn:

$$\chi_0^2 > \chi_{r^*-s-1; 1-\alpha}^2$$

Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2/2} dt; \quad \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0,76) = 0,776373$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,50000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992450	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1-1,350 \cdot 10^{-3}$	$1-2,326 \cdot 10^{-4}$	$1-3,167 \cdot 10^{-5}$	$1-3,998 \cdot 10^{-6}$	$1-2,867 \cdot 10^{-7}$	$1-9,866 \cdot 10^{-10}$	$1-1,280 \cdot 10^{-12}$	$1-6,221 \cdot 10^{-16}$	$1-1,129 \cdot 10^{-19}$	$1-7,620 \cdot 10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,95	0,975	0,99	0,995
1		6,31	12,7	31,8	63,7
2		2,92	4,30	6,97	9,93
3		2,35	3,18	4,54	5,84
4		2,13	2,78	3,75	4,60
5		2,02	2,57	3,37	4,03
6		1,94	2,45	3,14	3,71
7		1,90	2,37	3,00	3,50
8		1,86	2,31	2,90	3,36
9		1,83	2,26	2,82	3,25
10		1,81	2,23	2,76	3,17
11		1,80	2,20	2,72	3,11
12		1,78	2,18	2,68	3,06
13		1,77	2,16	2,65	3,01
14		1,76	2,15	2,62	2,98
15		1,75	2,13	2,60	2,95
16		1,75	2,12	2,58	2,92
17		1,74	2,11	2,57	2,90
18		1,73	2,10	2,55	2,88
19		1,73	2,09	2,54	2,86
20		1,73	2,09	2,53	2,85
22		1,72	2,07	2,51	2,82
24		1,71	2,06	2,49	2,80
26		1,71	2,06	2,48	2,78
28		1,70	2,05	2,47	2,76
30		1,70	2,04	2,46	2,75
40		1,68	2,02	2,42	2,70
50		1,68	2,01	2,40	2,68
100		1,66	1,98	2,37	2,63
200		1,65	1,97	2,35	2,60
∞		1,65	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 -Verteilung mit s Freiheitsgraden

s	p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1		2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2		4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3		6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4		7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5		9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6		10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7		12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8		13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9		14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10		16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11		17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12		18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13		19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14		21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15		22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16		23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17		24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18		26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19		27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20		28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21		29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22		30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23		32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24		33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25		34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26		35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27		36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28		37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29		39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30		40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40		51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50		63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60		74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70		85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80		96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90		107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100		118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Werte der Verteilungsdichte der Poisson-Verteilung

Po(λ): $h(x) = P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ mit $\mu = \lambda$ $\sigma^2 = \lambda$

$\mu = \lambda$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
k										
0	0,1353	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550
1	0,2707	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596
2	0,2707	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314
3	0,1804	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237
4	0,0902	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622
5	0,0361	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940
6	0,0120	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455
7	0,0034	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188
8	0,0009	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068
9	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022
10	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006

$\mu = \lambda$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
k										
0	0,0498	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202
1	0,1494	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789
2	0,2240	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539
3	0,2240	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001
4	0,1680	0,1733	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951
5	0,1008	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522
6	0,0504	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989
7	0,0216	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551
8	0,0081	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269
9	0,0027	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116
10	0,0008	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045