Kurzfragen:

1. Die Wärmekapazität c eines Körpers ist definiert durch das Verhältnis der Wärmeenergie, die zu- bzw. abgeführt wird zur Temperaturänderung. Geben Sie die Einheit der Wärmekapazität mit den Grundgrößen des SI-Systems an.

2. Bei einer Messung wird das Meßobjekt durch den Meßvorgang beeinflußt. Durch diese Rückwirkung kommt es zu einem Meßfehler. Nennen Sie die drei in der Vorlesung angegebenen Möglichkeiten, mit diesem Meßfehler umzugehen.

3. Eine elektronische Waage habe eine Digitalanzeige. Sie zeigt drei Ziffern ohne Komma an. Die Einheit ist g.
   a) Wie groß ist der Messbereich? b) Wie groß ist die Auflösung? c) Wie groß ist der Parallaxenfehler?

4. Aus welchen Elementen besteht ein vollständiges Meßergebnis?

5. Ein betrüger hat eine Münze so manipuliert, daß beim Werfen mit der Wahrscheinlichkeit $p=70\%$ "Kopf" und mit der Wahrscheinlichkeit $q=30\%$ "Zahl" fällt. Er wettet mit Mitspielern stets auf "Kopf".
   a) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt den Vorgang "Werfen einer Münze"?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betrüger bei drei Versuchen dreimal gewinnt?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Betrüger bei drei Versuchen dreimal verliert?
   d) Wie groß ist der Erwartungswert seines Gewinns bei drei Versuchen und einem jeweiligen Einsatz von 10 Euro?

6. X sei eine normalverteilte größe. Aus einer Messreihe mit *16* Wiederholungen wird das Vertrauensintervall für den Erwartungswert zur statistischen Sicherheit *95,4%* zu *[15,84;16,16]* bestimmt.
   a) Geben Sie die beste Schätzung für den Erwartungswert an.
   b) Geben Sie das Vertrauensintervall zur statistischer Sicherheit *68,3%* an.
   c) Bei wie vielen Wiederholungen der Messung ist *[15,84;16,16]* das Vertrauensintervall für den Erwartungswert zur statistischen Sicherheit *68,3%* ?

Aufgaben:

Zwei Biotech Institute (*Bio-Logic* und *Bio-Brain*) haben den Auftrag erhalten, für die Firma *First Biotech Power* unabhängig voneinander ein neues Verfahren zu entwickeln. Die Firma hat einen neuen, bahnbrechenden Bioreaktor auf mikrotechnischer Basis in ihre Produktionslinie eingestellt, und das Ziel der Entwicklung war, die Prozessparameter für einen - durch *First Biotech Power* geforderten - Massenstrom mit Hilfe einer Bio-FEM Simulationssoftware zu bestimmen. Der geforderte nominelle Massenstrom war als ***13 g/s*** angegeben, und am Ende der Entwicklungsphase wurden die beiden Lösungen durch einen Testbetrieb geprüft.

Die durch F.a. *Bio-Logic* empfohlene Parametrisierung hat die folgenden Messergebnisse geliefert:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Massenstrom B-L *[g/s]*	13,40	13,20	13,25	13,50	13,40	13,45	13,40	13,50	13,45	13,20	13,25	13,40

Die durch F.a. *Bio-Brain* favorisierte Lösung dagegen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Massenstrom B-B *[g/s]*	13,50	13,45	13,45	13,40	13,25	13,45	13,20	13,25	13,50	13,40	13,45	13,50

Fragen:

1. Können die empfohlenen Lösungen basierend auf den Testergebnissen die Vorschrift ***13 g/s nominelle Massenstrom*** auf einem Signifikanzniveau $\alpha=1\%$ erfüllen?

2. Trifft die Vermutung zu, dass beide Lösungen (von *Bio-Logic* und *Bio-Brain*) mit einer statistischen Sicherheit von ***P%=99 %*** den gleichen Massenstrom verursachen?

3. Geben Sie die Konfidenzintervalle für beide Lösungen mit einer statistischen Sicherheit von ***P%=95%*** an.

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Normalverteilung nach Gauß

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Konfidenzintervall

Die Meßgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\bar{x} - \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{c_{P\%}\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Meßgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}; \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \bar{y} + b(\bar{x} - x_j)\right)^2$$

Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P\%=1-\alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}S_x}, b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}S_x}\right]$$

Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit $P\%=1-\alpha$ ist ($y^* = \bar{y} + b(x^* - \bar{x})$):

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}},\quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P\%=1-\alpha$:

$$\left[f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) - c_f; f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) + c_f\right]$$

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2} \qquad c_{x_i} = \frac{t_{n_{x_i}-1;1-\alpha/2}}{\sqrt{n_{x_i}}} s_{x_i}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert:

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df=n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1.)H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.)H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.)H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte:

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x=n_y=n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad (df=2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1.)H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.)H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.)H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben:

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad (df=n-1)$$

$d_i=x_i-y_i \qquad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \qquad s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
Ist $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3.)H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Varianzanalyse

Summe der Abweichungsquadrate:

$$SQ_{total} = SQ_{Behandlung} + SQ_{Rest}$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a} r_i\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2$$

a: Anzahl Behandlungen (Gruppen)

r_i: Anzahl Wiederholungen (in Gruppen)

$n=a*r_i$ (vollkommen randomisierte Versuchsanlage)

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{r_i} y_{ij} \qquad \bar{y}_i = \frac{1}{r_i}\sum_{j=1}^{r_i} y_{ij}$$

Mittlere Quadratsummen:

$$MQ_{Behandlung} = \frac{SQ_{Behandlung}}{FG_{Behandlung}} = \frac{SQ_{Behandlung}}{a-1}$$

$$MQ_{Rest} = \frac{SQ_{Rest}}{FG_{Rest}} = \frac{SQ_{Rest}}{n-a}$$

Die Testgröße:

$$F_0 = \frac{MQ_{Behandlung}}{MQ_{Rest}}$$

Kritischer Wert:

$$F_{kritisch} = F_{FG_{Behandlung};FG_{Rest};1-\alpha}$$

Die Entscheidung:

Hypothese H_0 wird angenommen falls $F_0 < F_{kritisch}$

Der χ^2-Test für Verteilungsfunktionen

Die Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

B_i: Anzahl von Messwerten in der Klasse *i*

E_i: theoretische Besetzungszahl der Klasse *i*

r^* : Anzahl der auswertbaren Klassen (Filterkriterium: $E_i>5$)

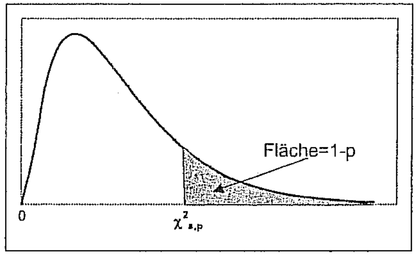
df : Freiheitsgrade $df=r^*-p-1$ (*p* ist die Zahl der geschätzten Parameter)

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-p-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2 - Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	36,74	40,11	43,19	46,96	49,65
28	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32
90	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17



p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t - Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,950	0,975	0,990	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
80	1,67	1,99	2,38	2,65
100	1,66	1,99	2,37	2,64
200	1,66	1,99	2,37	2,63
∞	1,65	1,96	2,33	2,58