Signale und Systeme

Ziele

Im Rahmen dieser Übung sollen die verschiedenen in der Vorlesung eher sequentiell abgehandelten Beschreibungsformen von Signalen und Systemen vertieft und in einen systematischen Zusammenhang gebracht werden. Die Arbeitsweise mit den wichtigsten elektrischen Messgeräten zur Systemanalyse (Signalgenerator und Oszilloskop) wird anhand von vorgeführten Experimenten vermittelt. Als Abschluss soll eine Systemidentifikation durch praktisches Anwenden der erlernten Fähigkeiten bei einem einfachen elektronischen System durchgeführt werden.

Signale und ihre mathematische Beschreibung

Tabelle 1: Symmetrieprinzip

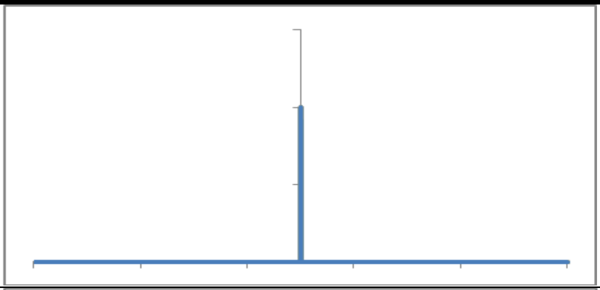
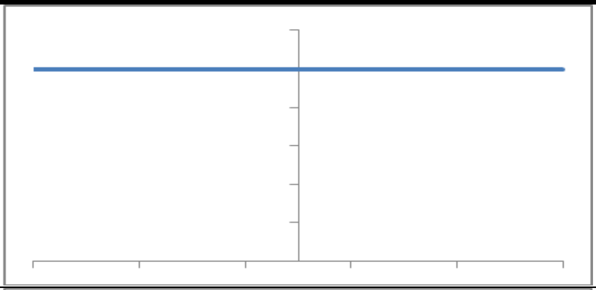
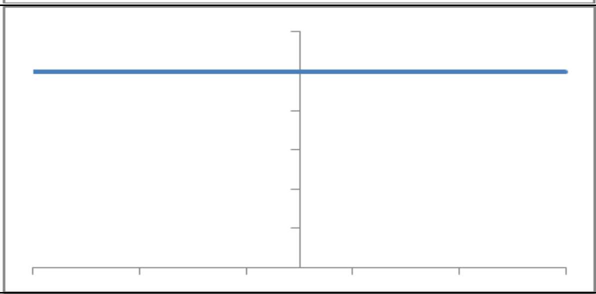
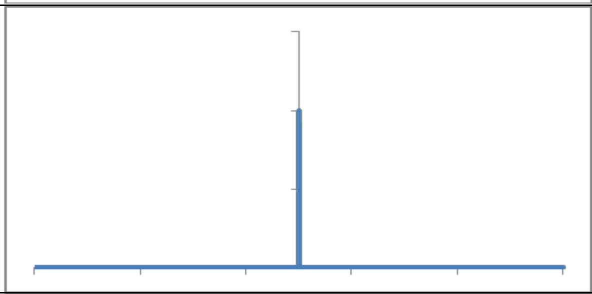
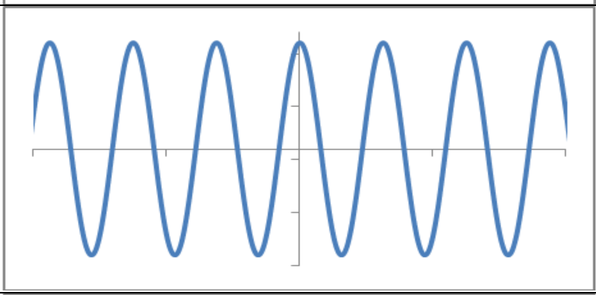
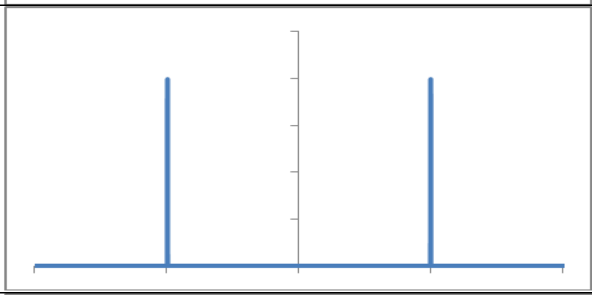
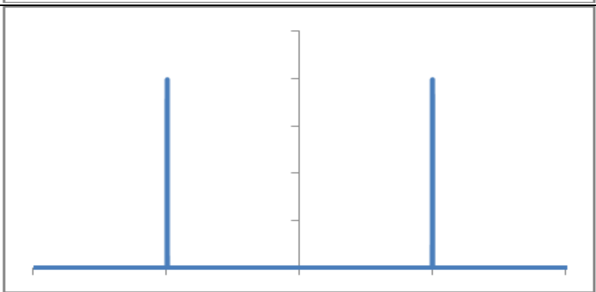
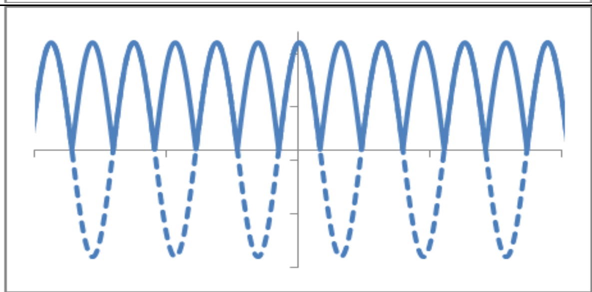
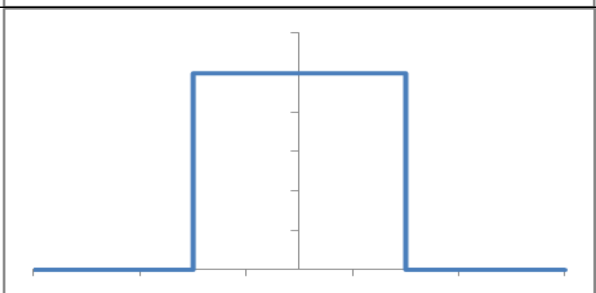
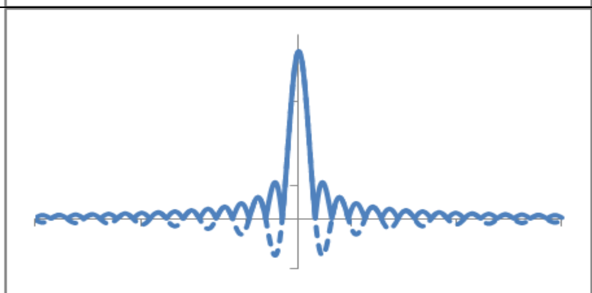
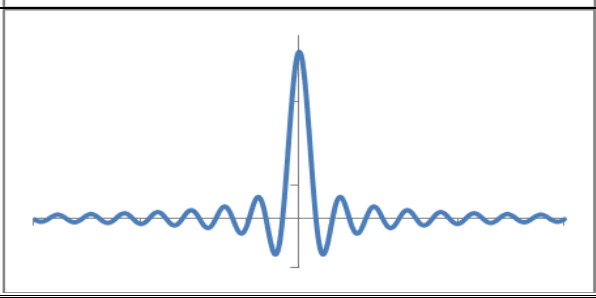
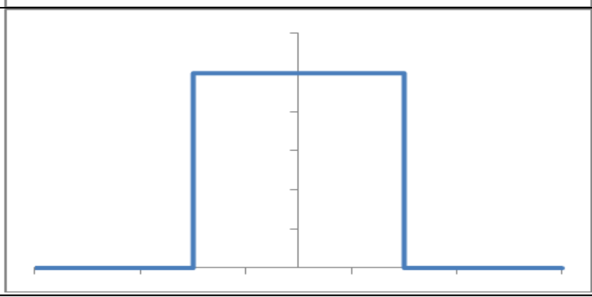
Zeitbereich	Frequenzbereich
Multiplikation Faltung	Faltung Multiplikation
periodisch diskret	diskret periodisch
aperiodisch kontinuierlich	kontinuierlich aperiodisch

Tabelle 2: Beschreibung von Signalen im Zeit- und Frequenzbereich

	Zeitbereich	Frequenzbereich
deterministisch	Funktion $x(t)$ Erwartungswert: $\mu = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$ Quadratischer Mittelwert $\psi = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$ Varianz $\sigma^2 = \psi^2 - \mu^2$	Fourierzerlegung (Spektrum) $x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$ Laplacetransformation $x(s) = \int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt$
stochastisch	Amplitudendichtefunktion $h(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ T\to\infty}} \frac{1}{\Delta x T}\sum_{i=1}^{n_j}\Delta t_i$ Autokorrelationsfunktion $\Phi_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$	Spektrale Leistungsdichte $S_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\tau)e^{-i\omega t}d\tau$

Messsignalverarbeitung im Maschinenbau --- 1. Übung --- S.2/8

Tabelle 3: Signale im Zeit- und Frequenzbereich

Zeitbereich (t)	Frequenzbereich (ω)
	
	
	
	
	
	

Anmerkung: Symmetrie zwischen Zeit- und Frequenzbereich gilt nur, wenn das Signal spiegelsymmetrisch zur y-Achse ist.

Systemidentifikation

Untersuchen Sie das gegebene System unter Verwendung des Oszilloskops und des Signalgenerators. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems und versuchen Sie die elektrische Schaltung zu rekonstruieren. Gehen sie dabei wie folgt vor:

1. Regen Sie das System mit einem Sprung an und schließen Sie aus der Antwort auf die Ordnung des Systems.

2. Regen Sie das System mit einem Sinussignal an und nutzen Sie die Sweepfunktion des Frequenzgenerators. Untersuchen Sie, wie sich das Signal mit steigender Frequenz ändert. Betrachten Sie im Besonderen den Frequenzbereich von 10 kHz bis 500 kHz. Was für ein Filterverhalten zeigt die Schaltung?

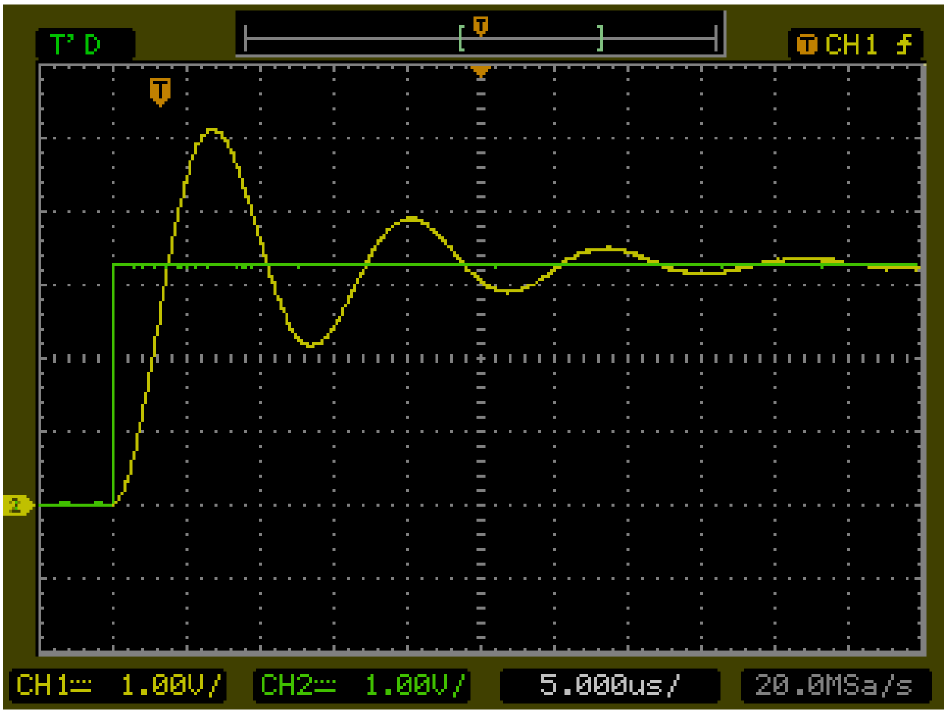
3. Entwickeln Sie auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse die allgemeine Übertragungsfunktion und das zugehörige Ersatzschaltbild des Systems. Wie ist der Ausgangswiderstand des Signalgenerators zu berücksichtigen?

4. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Multimeters den Widerstand der Strecke zwischen den beiden Innenstiften der BNC-Buchsen.

5. Bestimmen Sie mittels geeigneter Signale und Methoden die Dämpfung, die Eigenfrequenz und die Resonanzfrequenz des Systems und berechnen sie die Werte der übrigen elektrischen Komponenten.

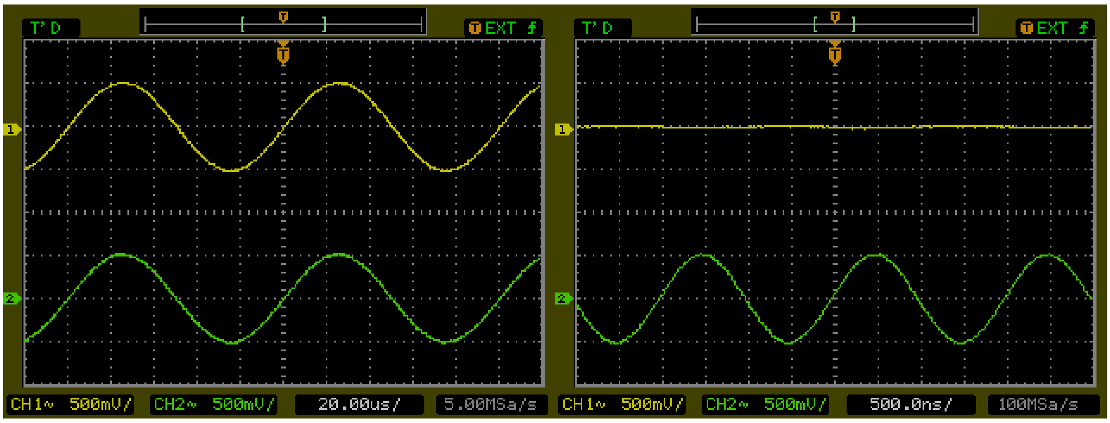
Lösung

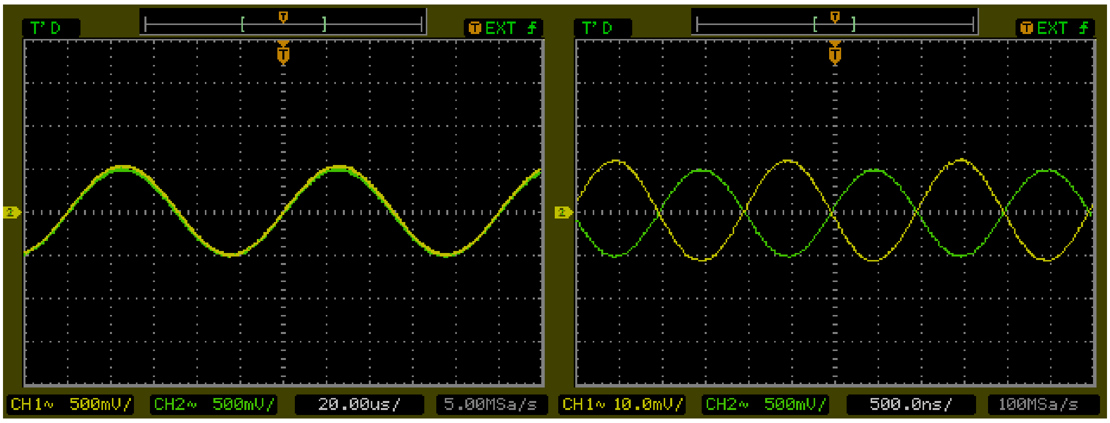
1. **Ergebnis der Sprungantwort**



Wie deutlich zu erkennen ist, handelt es sich um ein stabiles schwingungsfähiges System. Die Systemantwort (gelb) lässt auf ein System mindestens 2. Ordnung schließen.

2. Ergebnis der Untersuchung mit dem Sinussweepsignal

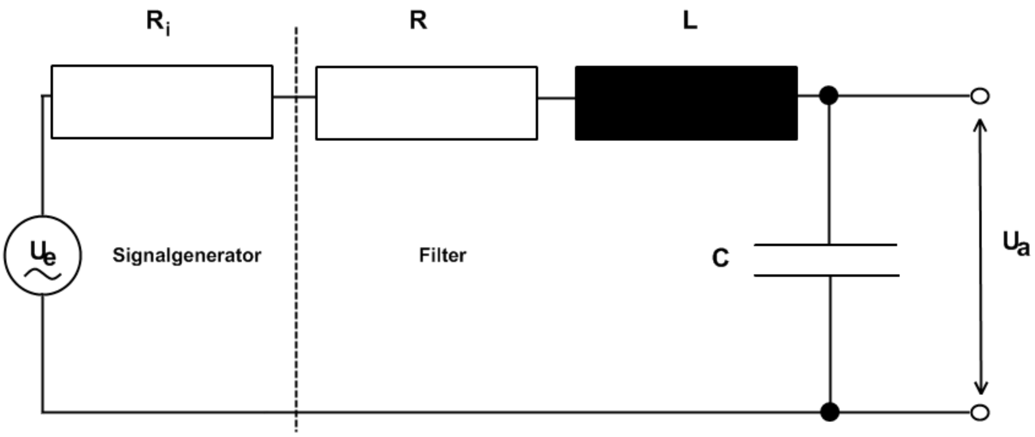




Die Bilder auf der linken Seite zeigen die Antwort des Systems (gelb) bei einer Anregung (grün) von 10 kHz. Die Bilder rechts zeigen die Antwort des Systems bei einer Anregungsfrequenz von 500kHz. Wie deutlich zu erkennen ist, liegt bei diesem System ein Tiefpassverhalten vor. Da der maximale Phasenwinkel 180° beträgt, ist es ein System 2. Ordnung.

3. Entwicklung der Übertragungsfunktion

Da an der Schaltung keine zusätzliche Stromversorgung angeschlossen ist, handelt es sich um ein passives Bauelement unterhalb der Abdeckung. In der Literatur findet man als einen Tiefpass 2. Ordnung einen RLC-Schwingkreis. Der Widerstand R_i bezeichnet den Innenwiderstand des Signalgenerators.



Als erstes sind die Maschengleichungen aufzustellen:

1. Masche:

$$U_e = U_R + U_L + U_C$$

2. Masche:

$$U_a = U_C$$

Des Weiteren ist bekannt:

$$U_R = R \cdot i$$

$$U_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i = C \frac{dU_a}{dt}$$

Durch Umformen und Einsetzen in die Maschengleichung 1 erhält man folgende Differenzialgleichung:

$$LC\left(\frac{dU_a}{dt}\right)^2 + RC\left(\frac{dU_a}{dt}\right) + U_a = U_e$$

Die Laplacetranformierte lautet:

$$LC\hat{U}_a s^2 + RC\hat{U}_a s + \hat{U}_a = \hat{U}_e$$

Durch Umformung erhält man die Übertragungsfunktion für das System:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Die allgemeine Schwingungsgleichung lautet:

$$\frac{X_a}{X_e} = \frac{\omega_0{}^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0{}^2}$$

entsprechend:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$D = \frac{R}{2L\omega_0}$$

4. Ergebnisse der Widerstandsmessung

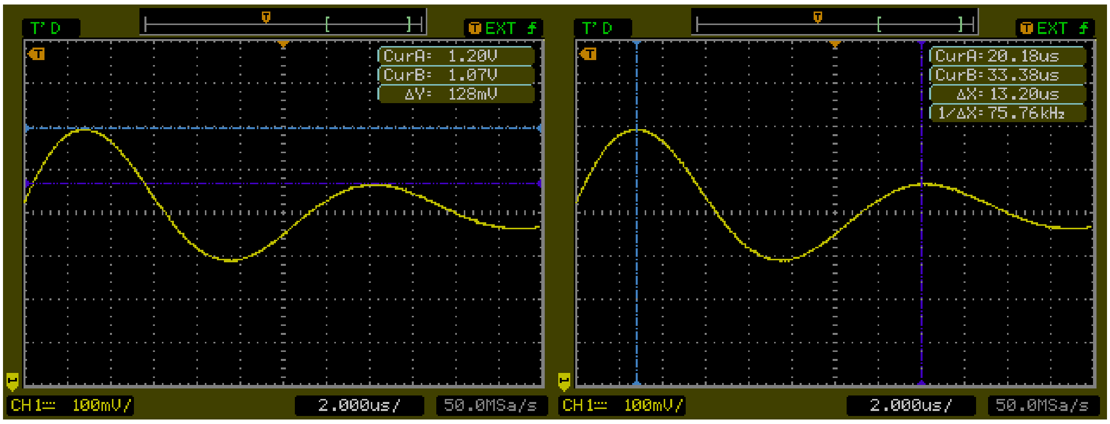
Bei der Widerstandmessung ist ein Widerstand von 21,1 Ohm ermittelt worden.

5. Ermittlung der restlichen Komponenten der Schaltung

Der Ansatz dieser Musterlösung verwendet die gedämpfte Kreisfrequenz, die Resonanzfrequenz und die Dämpfung des Systems, um die Werte für den Kondensator und die Spule zu ermitteln.

Um die Dämpfung und die gedämpfte Kreisfrequenz zu ermitteln, wird das System mittels eines Sprungs angeregt. Dazu wird durch den Signalgenerator ein Rechtecksignal mit einer Frequenz von 10 kHz, einem Tastverhältnis von 80% und den beiden Spannungen 0 V und 1 V eingestellt. Gleichzeitig wird das Sync-Signal des Signalgenerators auf den Triggereingang des Oszilloskops geleitet und dieses auf externe Triggerung eingestellt.

Die folgenden zwei Bilder sind das Ergebnis dieses Versuchs.



Die Dämpfung des Systems lässt sich mittels des logarithmischen Dekrements errechnen:

$$\Lambda = \ln\left(\frac{A_m}{A_n}\right) = 1{,}04982$$

A_m und A_n sind die Amplituden zweier aufeinanderfolgender Schwingungen. Da bei einer Sprungantwort das System um den Endwert schwingt, in diesem Fall 1 V, muss dieser von den angezeigten Werten im rechten Bild abgezogen werden um die Amplitude zu erhalten. Die Dämpfung des Systems erhält man aus:

$$D = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + 4\pi^2}} = 0{,}1648$$

Durch die Cursorfunktion des Oszilloskops kann die gedämpfte Kreisfrequenz ermittelt werden. Diese kann im rechten Bild als ω=476014 rad/s ➔f=75,76 kHz abgelesen werden.

Die Eigenfrequenz ω_0 des Systems, die für die weiteren Berechnungen benötigt wird, kann nun ermittelt werden.

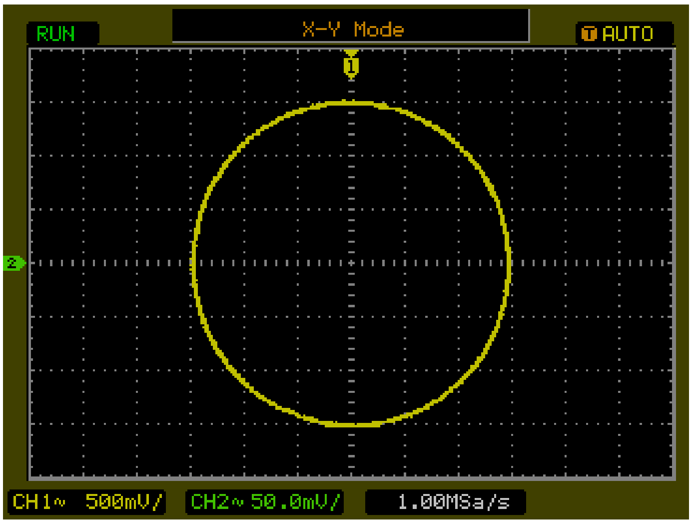
Messsignalverarbeitung im Maschinenbau --- 1. Übung --- S.7/8

$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{1-D^2}$ ➔ $\omega_0 = \dfrac{\omega}{\sqrt{1-D^2}}$ =482612 rad/s ➔ f_0=76,81 kHz

Die Resonanzfrequenz des Systems kann entweder durch Berechnung mit der Formel

$$\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2\cdot D^2}$$

oder durch die Kopplung von Eingangs- und Ausgangssignal am Oszilloskop ermittelt werden.



Der Kreis in der Darstellung zeigt, dass das Eingangssignal und das Ausgangssignal genau um 90° phasenverschoben sind. Dieses ist der Fall, wenn die Resonanzfrequenz erreicht ist. Die Berechnung der Resonanzfrequenz für dieses System ergibt ω_R=469321 rad/s ➔ f_R=74,7 kHz. Die Resonanzfrequenz die durch die Signalkopplung ermittelt wird ist am Signalgenerator abzulesen und kann leicht vom errechneten Wert abweichen, was auf die Ungenauigkeiten bei der Bestimmung von ω zurückzuführen ist.

Durch die aus der Differentialgleichung bekannten Beziehungen:

$$2\omega_0 D = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ergeben sich:

$$L = \frac{R}{2\omega_0 D} = 446{,}97\,\mu H \quad \text{(Bauteil: 470 µH)}$$

$$C = \frac{\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^2}{L} = 9{,}61\,nF \quad \text{(Bauteil: 10 nF)}$$

Zu beachten ist, dass für R nicht nur die ermittelten 21,1 Ω eingesetzt werden müssen, sondern der Innenwiderstand des Signalgenerators mitberücksichtigt werden muss. So ist bei der Berechnung der zwei fehlenden Komponenten mit einem Widerstandswert von 71,1 Ω zu rechnen.

Mit den berechneten Werten der einzelnen Komponenten lassen sich nun die wahre Resonanzfrequenz und die wahre Dämpfung des Systems ermitteln.

$$D = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}049 \approx 0{,}05$$

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2 \cdot D^2} = 74{,}73 \text{kHZ}$$

Die errechneten Werte entsprechen nicht genau den Werten, die bei der Auslegung der Schaltung zu Grunde lagen. Dieses hat zum Einen mit Fertigungstoleranzen der Bauteile zu tun, zum Anderen spielen parasitäre Kapazitäten in den Kabeln eine Rolle.