Lösung zu Aufgabe 9: t-Test für verbundene Stichproben

Unterscheidet sich die schlafverlängernde Wirkung zweier Schlafmittel A und B?

Auch der t-Test für verbundene Stichproben vergleicht – ähnlich wie der in Übungsaufgabe 8 behandelte t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte – zwei aus experimentellen Daten abgeschätzte Erwartungswerte. Allerdings ist er darauf ausgelegt, dass die Stichproben miteinander verbunden sind. Zwei (oder mehr) Stichproben sind immer dann miteinander verbunden, wenn zwischen den Elementen der Stichproben ein paarweiser Zusammenhang besteht. Daraus folgt auch, dass bei verbundenen Stichproben stets die Nebenbedingung $n_x = n_y = n$ erfüllt ist.

Ein Beispiel für verbundene Stichproben ist etwa, dass zwei Schlafmittel verglichen werden, indem n Probanden zuerst Schlafmittel A probieren und zwei Wochen später das Schlafmittel B. Es wird jeweils ermittelt, wie viel länger die Schlafdauer im Vergleich zur mittleren Schlafdauer ohne Schlafmittel ist. Durch diese Versuchanordnung ist jeweils ein Datensatz aus der ersten Messreiche (Medikament A) mit einem Datensatz aus der zweiten Messreihe (Medikament B) verbunden, da beide Messwerte an demselben Probanden ermittelt wurden.

Die Testgröße wird bei verbundenen Stichproben mit Hilfe einer zusätzlich eingeführten Variablen berechnet, nämlich der Differenz d_i der jeweils miteinander verbundenen Messwerte x_i und y_i:

$$d_i = x_i - y_i$$

Da diese Differenz d_i ihrerseits wieder eine normalverteilte Zufallsvariable ist, können wir deren Mittelwert und Streuung wie gewohnt berechnen:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Die Testgröße t_0 berechnet sich dann gemäß:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d / \sqrt{n}}$$

a) Welcher Test ist geeignet, die Frage zu beantworten.

Da die Messung der schlafverlängernden Wirkung nacheinander jeweils an denselben Patienten erfolgte, sind die Ergebnisse paarweise miteinander verbunden. Wir müssen also einen t-Test für verbundene Stichproben durchführen.

b) Müssen wir eine einseitige oder zweiseitige Hypothese stellen?

Laut Aufgabenstellung soll überprüft werden, ob sich die Wirkung der beiden Schlafmittel **unterscheidet**. Da nur nach einem Unterschied gefragt ist, nicht jedoch danach, ob eines der Medikamente besser oder schlechter wirkt, testen wir mit einer **zweiseitigen** Alternativhypothese.

c) Anwendung des Tests

Um die Testgröße t_0 berechnen zu können, müssen wir zunächst die Differenzen d_i der paarweise verbundenen Messwerte ermitteln. Dafür definieren wir zunächst folgende Zuordnung zu den Medikamenten A und B:

$$X \mathrel{\hat{=}} A$$

$$Y \mathrel{\hat{=}} B$$

Die Differenzen d_i ergeben sich damit zu:

$$d_i = \Delta T_{Ai} - \Delta T_{Bi}$$

Wir ergänzen entsprechend unsere Tabelle der vorliegenden Messwerte um eine Zeile für die Differenz d und erhalten:

Testperson i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔT_A / h	1,9	0,8	1,1	0,1	-0,1	4,4	5,5	1,6	4,6	3,4
ΔT_B / h	0,7	-1,6	-0,2	-1,2	-0,1	3,4	3,7	0,8	0,0	2,0
d / h	1,2	2,4	1,3	1,3	0	1	1,8	0,8	4,6	1,4

Daraus ergeben sich Mittelwert und Streuung der Größe d zu:

$$\bar{d} = 1{,}58\ \text{h}$$

$$S_d \approx 1{,}23\ \text{h}$$

Die Testgröße t_0 errechnet sich gemäß obiger Formel mit den Zahlenwerten für Mittelwert und Streuung sowie dem bekannten Stichprobenumfang von n = 10 zu:

$$t_0 = \frac{1{,}58\ \text{h}}{\frac{1{,}23\ \text{h}}{\sqrt{10}}} \approx 4{,}062$$

Den Wert dieser Testgröße müssen wir nun mit einem kritischen Wert vergleichen. Die Bestimmung dieses kritischen Wertes sowie die Testregel hängen von der interessierenden Alternativhypothese H_1 ab. Prinzipiell können wir beim t-Test für verbundene Stichproben zwischen den folgenden drei Varianten unterscheiden:

1) $H_0 : \mu_d = 0$ gegen $H_1 : \mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2) $H_0 : \mu_d = 0$ gegen $H_1 : \mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

Ist $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3) $H_0 : \mu_d = 0$ gegen $H_1 : \mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Wie bereits oben erläutert, testen wir im vorliegenden Fall mit einer zweiseitigen Alternativhypothese $H_1 : \mu_d \neq 0$, also gemäß Fall 3 der obigen Auflistung.

Die in diesem Fall anzuwendende Testregel lautet:

Ist $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der kritische Wert, mit dem unsere oben berechnete Testgröße t_0 verglichen werden muss, lautet demnach $t_{n-1;1-\alpha/2}$. Den Zahlenwert von $t_{n-1;1-\alpha/2}$ bestimmen wir mit Kenntnis des Stichprobenumfangs n und des Signifikanzniveaus α aus der Tabelle der Student'schen t-Verteilung. Mit n = 10 und α = 0,05 erhalten wir:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{10-1;1-\frac{0,05}{2}} = t_{9;0,975} = 2,262$$

Die auszuwertende Testbedingung lautet damit:

$$|4,062| > 2,262$$

Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Die Testregel besagt nun weiter, dass für den Fall, dass obige Bedingung erfüllt ist, die Nullhypothese H_0 auf dem Signifikanzniveau α abzulehnen ist. Wie schließen also:

Die Nullhypothese $H_0 : \mu_d = 0$ wird auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ abgelehnt!

Inhaltlich besagte unsere Nullhypothese, dass sich die schlafverlängernde Wirkung der beiden getesteten Medikamente **nicht** unterscheidet. Die Ablehnung der Nullhypothese bedeutet daher im vorliegenden Fall:

Es kann mit einer statistischen Sicherheit von P = 95% davon ausgegangen werden, dass sich die schlafverlängernde Wirkung der beiden Medikamente A und B voneinander unterscheidet.