Lösung zu Aufgabe 8: t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

a) Fertigt Drehmaschine 2 signifikant ($\alpha = 0{,}025$) kleinere Wellendurchmesser als Drehmaschine 1?

Bei der vorliegenden Aufgabe wurde an zwei Drehmaschinen für die Fertigung von Wellen jeweils eine Stichprobe vom Umfang n = 20 entnommen. An den so erhaltenen Wellen wurde jeweils der Wellendurchmesser D messtechnisch bestimmt. Aus diesen experimentell ermittelten Daten lässt sich für beide Drehmaschinen getrennt jeweils der Erwartungswert des Wellendurchmessers aller auf dieser Maschine gefertigten Wellen abschätzen. Es soll nun mittels eines t-Tests überprüft werden, ob die auf Drehmaschine 2 gefertigten Wellen einen signifikant kleineren Durchmesser aufweisen, als die auf Drehmaschine 1 gefertigten.

Im Unterschied zur vorangegangenen Übungsaufgabe 7 sollen also nicht der anhand einer einzelnen Messreihe abgeschätzte Erwartungswert mit einem festen Referenzwert verglichen werden, sondern es liegen zwei aus experimentellen Daten abgeschätzte Erwartungswerte vor, die miteinander verglichen werden sollen. Diese Fragestellung kann mit einem t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte beantwortet werden:

Für den t-Test zum Vergleich zweier Erwartungswerte werden zwei Stichproben gemessen mit n_x *Messungen von* X *und* n_y *Messungen von* Y.

Dabei sei X (μ_x, σ) *-normalverteilt und* Y *sei* (μ_y, σ) *-normalverteilt und* μ_x, μ_y *und* σ *seien unbekannt. Es wird vermutet, dass sich die Erwartungswerte der beiden Stichproben gleichen, daraus ergibt sich die Nullhypothese* $H_0 : \mu_x = \mu_y$.

Für den hier vorliegenden Sonderfall, dass die Stichprobenumfänge n_x und n_y identisch sind ($n_x = n_y = n$), vereinfacht sich die Berechnung der Testgröße t_0 zu folgendem Ausdruck:

$$t_0 = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}$$

Hierin sind $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die aus experimentell erhobenen Messwerten berechneten arithmetischen Mittelwerte als beste Schätzwerte für die Erwartungswerte der Verteilungen der beiden Zufallsgrößen X und Y, S_x und S_y sind die empirischen Streuung der beiden Messreihen und n ist der für beide Messreihen identische Stichprobenumfang.

Um eine eindeutige Zuordnung zwischen unseren Messreihen und den allgemein mit X und Y bezeichneten Messgrößen vornehmen zu können, müssen wir noch eine geeignete Festlegung treffen. Im Weiteren bezeichnen wir daher die für Drehmaschine 1 erhaltenen Durchmesser als D_1 und entsprechend jene für Drehmaschine 2 als D_2 und treffen folgende Zuordnung:

$$X \mathrel{\hat{=}} D_1$$

$$Y \mathrel{\hat{=}} D_2$$

Entsprechend gelten für die zur Berechnung der Testgröße t_0 benötigten Größen folgende Zuordnungen:

$$\overline{x} = \overline{D}_1$$

$$\overline{y} = \overline{D}_2$$

$$S_x = S_{D_1}$$

$$S_y = S_{D_2}$$

Wir könnten diese Zuordnung ebenso gut umgekehrt vornehmen. Da wir im weiteren Verlauf mit einer einseitige Alternativhypothese testen werden, ist es lediglich wichtig, überhaupt eine eindeutige Zuordnung vorzunehmen.

Wir berechnen zunächst die Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$ und die Streuungen S_x und S_y der vorliegenden Messreihen:

$$\overline{x} = 12,68 \text{ mm}$$

$$\overline{y} = 12,49 \text{ mm}$$

$$S_x \approx 0,3 \text{ mm}$$

$$S_y \approx 0,35 \text{ mm}$$

Ferner wissen wir, dass der Stichprobenumfang beider Messreihen n = 20 beträgt.

Die Testgröße t_0 ergibt sich daher zu:

$$t_0 = \sqrt{20} \cdot \frac{12,68 \text{ mm} - 12,49 \text{ mm}}{\sqrt{(0,3 \text{ mm})^2 + (0,35 \text{ mm})^2}} \approx 1,843$$

Den Wert dieser Testgröße müssen wir nun mit einem kritischen Wert vergleichen. Die Bestimmung dieses kritischen Wertes sowie die Testregel hängen von der interessierenden Alternativhypothese H_1 ab. Prinzipiell können wir beim t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte zwischen den folgenden drei Varianten unterscheiden:

1) $H_0 : \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist $t_0 < -t_{n_x + n_y - 2; 1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2) $H_0 : \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist $t_0 > t_{n_x + n_y - 2; 1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3) $H_0 : \mu_x = \mu_y$ gegen $H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist $|t_0| > t_{n_x + n_y - 2; 1-\alpha/2}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Laut Aufgabenstellung sollen wir überprüfen, ob der Durchmesser der auf Maschine 2 gefertigten Wellen kleiner ist, als jener der auf Maschine 1 gefertigten. Mit unserer oben eingeführten Bezeichnung der Durchmesser und der vorgenommen Zuordnung zu den Variablen X und Y ergibt sich, dass wir mit der einseitigen Alternativhypothese $H_1 : \mu_x > \mu_y$ testen müssen, in obiger Aufzählung also der Fall 2.

Die in diesem Fall anzuwendende Testregel lautet:

Ist $t_0 > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$, wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der kritische Wert, mit dem unsere oben berechnete Testgröße t_0 verglichen werden muss, lautet demnach $t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$. Den Zahlenwert von $t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$ bestimmen wir mit Kenntnis der beiden (hier identischen) Stichprobenumfänge n_x und n_y und des Signifikanzniveaus α aus der Tabelle der Student'schen t-Verteilung. Mit $n_x = n_y = n = 20$ und $\alpha = 0{,}025$ erhalten wir:

$$t_{n_x+n_y-2;1-\alpha} = t_{20+20-2;0,975} = t_{38;0,975} \approx t_{40;0,975} = 2{,}021$$

Erläuterung: Da in der zur Verfügung stehenden Tabelle nur für die Freiheitsgrade 30 und 40 ein p-Quantil angegeben ist, verwenden wir der Einfachheit halber den nächstliegenden Wert mit einem Freiheitsgrad von 40. Alternativ könnten wir auch eine lineare Interpolation vornehmen, was zu einem p-Quantil von 2,0252 führen würde. Der korrekte Wert, der etwa mit einem geeigneten Taschenrechner abgefragt werden kann, lautet im vorliegenden Fall 2,024394147.

Die auszuwertende Testbedingung lautet damit:

$$1{,}843 > 2{,}021$$

Diese Bedingung ist offensichtlich **nicht** erfüllt. Die Testregel besagt nun weiter, dass für den Fall, dass obige Bedingung erfüllt ist, die Nullhypothese H_0 auf dem Signifikanzniveau α abzulehnen ist. Wie schließen also:

Die Nullhypothese $H_0 : \mu_x = \mu_y$ wird auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}025$ **nicht** abgelehnt!

Inhaltlich besagte unsere Nullhypothese, dass sich die Erwartungswerte der Durchmesser D_1 und D_2 **nicht** unterscheiden. Die Nicht-Ablehnung der Nullhypothese bedeutet daher im vorliegenden Fall und bezogen auf die Fragestellung im Aufgabentext:

Es kann mit einer statistischen Sicherheit von P = 97,5% davon ausgegangen werden, dass sich die Durchmesser der auf den Drehmaschinen 1 und 2 gefertigten Wellen nicht voneinander unterscheiden. Die zu überprüfende Annahme, dass Drehmaschine 2 signifikant kleinere Wellendurchmesser fertigt, als Drehmaschine 1 kann daher mit der entsprechenden statistischen Sicherheit verworfen werden.