Lösung zu Aufgabe 6: Abweichungsfortpflanzung

a) Vollständige Messergebnisse für Radiusmessung mittels zweier verschiedener Messmittel und Identifizierung des zuverlässigeren Verfahrens:

Es soll für die beiden in der Aufgabenstellung beschriebenen Messmittel jeweils das vollständige Messergebnis für den Radius des zu untersuchenden Werkstücks berechnet werden, um auf diese Weise feststellen zu können, mit welchem der beiden Messmittel unter den gegebenen Randbedingungen das Ergebnis zuverlässiger, also mit der geringeren Unsicherheit bestimmt werden kann.

Da bei beiden Verfahren der zu messende Radius indirekt aus mehreren abweichungsbehafteten Eingangsgrößen ermittelt wird, ist zur Bestimmung des vollständigen Messergebnisses in beiden Fällen eine Abweichungsfortpflanzungsrechnung durchzuführen. Das Grundprinzip der Abweichungsfortpflanzung wurde bereits in Übungsaufgabe 5 am Beispiel der Flächenbestimmung eines Rechtecks erläutert. Dasselbe Grundprinzip ist auch auf die vorliegende Fragestellung anwendbar. Neben der höheren Komplexität liegt der wesentliche Unterschied zwischen der vorliegenden und der vorangegangenen Übungsaufgabe darin, dass die Unsicherheiten der Eingangsgrößen teilweise zunächst aus empirisch ermittelten Daten errechnet bzw. auf die korrekte Aussagewahrscheinlichkeit umgerechnet werden müssen.

Wir bestimmen zunächst das vollständige Messergebnis für die Messung mittels des in der Aufgabenstellung beschriebenen Messschiebers. Die Bestimmungsgleichung für den Radius r lautet in diesem Fall:

$$r = \frac{1}{2}\left(a - b \cdot \tan\alpha\right)$$

Der gesuchte Radius r ist also von den drei Eingangsgrößen a, b und α abhängig. Den Angaben der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, dass alle drei Eingangsgrößen mit einer Abweichung behaftet sind. Wir benötigen also für die Abweichungsfortpflanzungsrechnung zunächst für alle drei Eingangsgrößen x_i ein vollständiges Messergebnis, bestehend aus dem Mittelwert $\overline{x}_i$ und der Unsicherheit c_{x_i}, jeweils bezogen auf die laut Aufgabenstellung für den Radius r geforderte Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98%.

Für die Länge a liegen 10 Einzelmessungen vor. Aus dieser Messreihe ist ein vollständiges Messergebnis der Länge a für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% zu berechnen. Hierzu berechnen wir zunächst den Mittelwert und die Streuung der Messreihe:

$$\overline{a} = 99{,}997 \text{ mm}$$

$$s_a \approx 0{,}01767 \text{ mm}$$

Die Unsicherheit c_a beträgt allgemein:

$$c_a = \frac{s_a}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

Aus der Angabe der Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% ergibt sich ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 10$. Es gilt hier für das gesuchte p-Quantil der Student'schen t-Verteilung demnach:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;0,99}$$

Aus der Tabelle des p-Quantils der Student'schen t-Verteilung entnehmen wir:

$$t_{9;0,99} = 2{,}821$$

Die Unsicherheit der Länge a errechnet sich somit zu:

$$c_a = \frac{0{,}01767\ \text{mm}}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}821 \approx 0{,}01576\ \text{mm}$$

Das vollständige Messergebnis der Länge a lautet folglich:

$$a = 99{,}997\ \text{mm} \pm 0{,}01576\ \text{mm}\ ;\ P = 98\%$$

Für den Winkel α ist in der Aufgabenstellung bereits ein vollständiges Messergebnis für die betrachtete statistische Sicherheit von P = 98% angegeben. Dieses lautet:

$$\alpha = 0° \pm 0{,}05°\ ;\ P = 98\%$$

Wie eine Betrachtung der Einheiten weiter unten zeigt, muss diese in der Einheit Grad (°) vorliegende Winkelangabe in eine einheitenlose Winkeldarstellung umgerechnet werden. Eine einheitenlose Darstellung von Winkeln stellt das Bogenmaß dar. (Bei der hierbei oftmals angegebene Einheit Radiant (rad) handelt es sich nicht um eine Einheit im eigentlichen Sinne, sondern um eine Hilfseinheit.) Im Bogenmaß lautet das vollständige Messergebnis des Winkels α:

$$\alpha = 0\ \text{rad} \pm 8{,}727 \cdot 10^{-4}\ \text{rad}\ ;\ P = 98\%$$

Das für die Länge b in der Aufgabenstellung angegebene vollständige Messergebnis kann in unveränderter Form für die weiteren Berechnungen eingesetzt werden und lautet:

$$b = 50\ \text{mm} \pm 0{,}5\ \text{mm}\ ;\ P = 98\%$$

Mit den oben aufgeführten Eingangsgrößen und dem bekannten funktionalen Zusammenhang für den zu ermittelnden Radius r kann zunächst der Mittelwert des Radius $\bar{r}$ berechnet werden. Hierzu werden die Mittelwerte der Eingangsgrößen in die gegebene Funktion eingesetzt:

$$\bar{r} = \frac{1}{2}\left(\bar{a} - \bar{b} \cdot \tan \bar{\alpha}\right)$$

Einsetzten der bekannten Werte liefert:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{1}{2}\cdot\left(99{,}997\ \text{mm} - 50\ \text{mm}\cdot\tan 0\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\bar{a}\\ &= 49{,}9985\ \text{mm}\end{aligned}$$

Als nächstes werden die partiellen Ableitungen der Funktion an der Stelle $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{\alpha}$ gebildet:

$$\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial b}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}} = -\frac{1}{2}\cdot\tan\bar{\alpha} = 0$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}} = -\frac{1}{2}\cdot\bar{b}\cdot\frac{1}{\cos^2\bar{\alpha}} = -25\ \text{mm}$$

Nun kann die Gleichung für die Unsicherheit c_r des Radius aufgestellt werden. Dabei wird nach der bereits früher eingeführten allgemeinen Gleichung

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n} c_{x_i}\right)^2}$$

für jede abweichungsbehaftete Eingangsgröße ein entsprechender Unsicherheitsbeitrag in Form des Produkts aus partieller Ableitung und Unsicherheit der Eingangsgröße bestimmt. Die Quadrate dieser Unsicherheitsbeiträge werden aufsummiert und aus dieser Summe die Wurzel gezogen. Für den vorliegenden Fall mit den abweichungsbehafteten Eingangsgrößen $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $\bar{\alpha}$ ergibt sich die Unsicherheit der zusammengesetzten Messgröße $\bar{r}$ somit zu:

$$c_r = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}}\cdot c_a\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial r}{\partial b}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}}\cdot c_b\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial r}{\partial \alpha}\right|_{\bar{a},\bar{b},\bar{\alpha}}\cdot c_\alpha\right)^2}$$

Das Einsetzten der oben aufgeführten Zahlenwerte liefert:

$$\begin{aligned}c_r &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}01576\ \text{mm}\right)^2 + \left(0\cdot 0{,}5\ \text{mm}\right)^2 + \left(-25\ \text{mm}\cdot 8{,}727\cdot 10^{-4}\right)^2}\\ &= \sqrt{\left(0{,}00788\ \text{mm}\right)^2 + \left(0\ \text{mm}\right)^2 + \left(-0{,}0218175\ \text{mm}\right)^2}\\ &\approx 0{,}0232\ \text{mm}\end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich nun auch erkennen, weshalb das vollständige Messergebnis des Winkels α in das Bogenmaß umgerechnet wurde. Da alle Unsicherheitsbeiträge dieselbe Einheit aufweisen müssen – in diesem Fall Millimeter – hätte im dritten Term eine Produktbildung der Einheiten Millimeter und Grad zu einem falschen Ergebnis geführt.

Weiterhin ist zu erkennen, dass der Unsicherheitsbeitrag der Länge b hier zu Null wird, da die partielle Ableitung Null ist. Rein rechnerisch wäre also der Unsicherheitsbeitrag der Länge b auch dann Null, wenn die Abweichung der Länge b sehr groß wäre. An diesem Umstand, der nicht mit unserer Anschauung überein stimmt, zeigt sich, dass es sich bei dieser rechnerischen Herangehensweise aufgrund des linearen Ansatzes nur um eine Näherungslösung handelt. Darüber hinaus sei nochmals daran erinnert, dass dieser Ansatz aufgrund der Linearisierung auch nur für kleine Abweichungen der Eingangsgrößen sinnvoll anwendbar ist.

Das sich aus obigen Teilergebnissen ergebende vollständige Messergebnis für die Radiusbestimmung mittels eines Messschiebers lautet:

$$r = 49{,}9985\ \text{mm} \pm 0{,}0232\ \text{mm}\,;\ P = 98\%$$

Analog zur obigen Vorgehensweise erfolgt nun die Berechnung des vollständigen Messergebnisses für den Radius r bei Einsatz der Messeinrichtung mit Dreipunktantastung.

Für den Abstand L ist in der Aufgabenstellung ein vollständiges Messergebnis angegeben, allerdings bezieht sich dieses auf eine statistische Sicherheit von P = 95%:

$$L = 25\ \text{mm} \pm 0{,}004\ \text{mm}\,;\ P = 95\%$$

Da das vollständige Messergebnis für die zusammengesetzte Messgröße r bezogen auf eine statistische Sicherheit von P = 98% angegeben werden soll, müssen auch die vollständigen Messergebnisse aller Eingangsgrößen bezogen auf diese statistische Sicherheit vorliegen. Es ist daher erforderlich, das vollständige Messergebnis des Abstands L auf eine statistische Sicherheit von P = 98% umzurechnen.

Da der Mittelwert der Größe unabhängig von der gewählten statistischen Sicherheit ist, muss lediglich die Unsicherheit c_L umgerechnet werden. Allgemein gilt für die Breite c des Konfidenzintervalls zum Signifikanzniveau α:

$$c = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

Zwei spezielle Konfidenzintervalle zu den Signifikanzniveaus α_1 und α_2 lauten somit:

$$c_{\alpha_1} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha_1}{2}}$$

$$c_{\alpha_2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\frac{\alpha_2}{2}}$$

Da die Streuung s und der Stichprobenumfang n für eine konkrete Messreihe identisch sind, kann folgende Gleichsetzung vorgenommen werden:

$$\frac{c_{\alpha_1}}{t_{n-1;1-\frac{\alpha_1}{2}}} = \frac{c_{\alpha_2}}{t_{n-1;1-\frac{\alpha_2}{2}}}$$

Wenn wir im weiteren davon ausgehen, dass das mit α_1 bezeichnete Signifikanzniveau das bekannte und das mit α_2 bezeichnete Signifikanzniveau das gesuchte ist, können wir die gesuchte Unsicherheit c_{α_2} zum Signifikanzniveau α_2 wie folgt berechnen:

$$c_{\alpha_2} = c_{\alpha_1} \cdot \frac{t_{n-1;1-\frac{\alpha_2}{2}}}{t_{n-1;1-\frac{\alpha_1}{2}}}$$

Im vorliegenden Fall sind folgende Werte für α_1 und α_2 vorgegeben:

$$\alpha_1 = 0{,}05 \quad \hat{=} \quad P = 95\%$$

$$\alpha_2 = 0{,}02 \quad \hat{=} \quad P = 98\%$$

Ferner ist der Aufgabenstellung zu entnehmen, dass das angegebene vollständige Messergebnis mit einem Stichprobenumfang von $n = 10$ ermittelt wurde. Die p-Quantile der Student'schen t-Verteilung ergeben sich damit auf bekannte Weise wie folgt:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha_1}{2}} = t_{9;0,975} = 2{,}262$$

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha_2}{2}} = t_{9;0,99} = 2{,}821$$

Die Unsicherheit des Abstands L zur statistischen Sicherheit von $P = 98\%$ ergibt sich damit zu:

$$c_{L_{98\%}} = 0{,}004\ \text{mm} \cdot \frac{2{,}821}{2{,}262} \approx 0{,}00499\ \text{mm}$$

Das vollständige Messergebnis des Abstands L zur statistischen Sicherheit von P = 98% lautet damit:

$$L = 25\ \text{mm} \pm 0{,}00499\ \text{mm}\,;\ P = 98\%$$

Das in der Aufgabenstellung angegebene vollständige Messergebnis der Höhe h kann in unveränderter Form verwendet werden und lautet:

$$h = 1{,}588\ \text{mm} \pm 0{,}002\ \text{mm}\,;\ P = 98\%$$

Nun kann zunächst die Berechnung des Mittelwertes des Radius wie folgt vorgenommen werden:

$$\bar{r} = \frac{\bar{h}}{2} + \frac{\bar{L}^2}{8 \cdot \bar{h}}$$

Einsetzten der bekannten Werte liefert:

$$\bar{r} = \frac{1{,}588\ \text{mm}}{2} + \frac{(25\ \text{mm})^2}{8 \cdot 1{,}588\ \text{mm}}$$
$$\approx 49{,}9911\ \text{mm}$$

Als nächstes werden die partiellen Ableitungen der Funktion an der Stelle $\overline{h}, \overline{L}$ gebildet:

$$\left.\frac{\partial r}{\partial h}\right|_{\overline{h},\overline{L}} = \frac{1}{2} - \frac{\overline{L}^2}{8 \cdot \overline{h}^2} \approx -30{,}4805$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial L}\right|_{\overline{h},\overline{L}} = \frac{\overline{L}}{4 \cdot \overline{h}} \approx 3{,}9358$$

Die Gleichung zur Berechnung der Unsicherheit des zusammengesetzten Messergebnisses in Abhängigkeit der abweichungsbehafteten Eingangsgrößen h und L lautet im vorliegenden Fall:

$$c_r = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial r}{\partial h}\right|_{\overline{h},\overline{L}} \cdot c_h\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial r}{\partial L}\right|_{\overline{h},\overline{L}} \cdot c_L\right)^2}$$

Das Einsetzten der oben aufgeführten Zahlenwerte liefert:

$$\begin{aligned} c_r &= \sqrt{(-30{,}4805 \cdot 0{,}002\text{ mm})^2 + (3{,}9358 \cdot 0{,}00499\text{ mm})^2} \\ &= \sqrt{(-0{,}060961\text{ mm})^2 + (0{,}019639642\text{ mm})^2} \\ &\approx 0{,}06405\text{ mm} \end{aligned}$$

Das sich aus obigen Teilergebnissen ergebende vollständige Messergebnis für die Radiusbestimmung mittels Dreipunktantastung lautet:

$$r = 49{,}9911\text{ mm} \pm 0{,}06405\text{ mm}\,;\ P = 98\%$$

Für die Beantwortung der Frage, unter Einsatz welches Messmittels der Radius zuverlässiger, also mit der geringeren Unsicherheit, bestimmt werden kann, müssen wir nun die Breite der beiden berechneten Konfidenzintervalle miteinander vergleichen. Für die Messung mittels eines Messschiebers erhalten wir eine Unsicherheit von $c_r = 0{,}0232\text{ mm} = 23{,}2\ \mu\text{m}$, für die Messung mittel Dreipunktantastung erhalten wir $c_r = 0{,}06405\text{ mm} = 64{,}05\ \mu\text{m}$. Wir erkennen also: **Die Benutzung des Messschiebers ermöglicht im vorliegenden Fall die zuverlässigere Bestimmung des Zylinderradius.**

Dieses Resultat mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, da die Eingangsgrößen bei der Dreipunktantastung mit Unsicherheiten von wenigen Mikrometern vorliegen, während bei der Messung mit dem Messschieber die Eingangsgrößen vergleichsweise große Abweichungen aufweisen. Dies verdeutlicht, dass der Einfluss einer Abweichung auf der Eingangsseite nicht nur von der Größe der Abweichung selbst abhängig ist, sondern ganz entscheidend auch davon abhängt, welche Empfindlichkeit gegenüber Variationen dieser Eingangsgröße besteht. Diese Empfindlichkeit hängt zudem nicht nur vom funktionalen Zusammenhang selbst ab, sondern auch von den Mittelwerten der Eingangsgrößen. Wie sich unschwer überprüfen lässt, würde im vorliegenden Fall für kleinere Radien unterhalb von etwa 30 mm die Dreipunktantastung die geringere Unsicherheit liefern.