Lösung zu Aufgabe 5: Abweichungsfortpflanzung

a) Vollständiges Messergebnis der Fläche A des Rechtecks mit den abweichungsbehafteten Kantenlängen a und b:

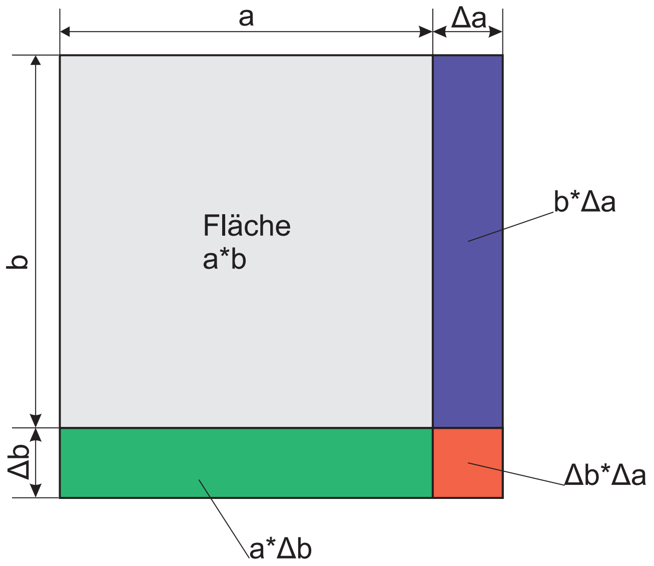
Viele Messgrößen werden indirekt gemessen, d.h. um einen Messwert zu ermitteln werden mehrere Einflussgrößen gemessen und mittels einer Formel die gewünschte Größe errechnet. Die Abweichungs- bzw. Fehlerfortpflanzung beschreibt die Auswirkungen abweichungsbehafteter Einflussgrößen auf das Gesamtergebnis.

Im vorliegenden Fall sei die Fläche A eines Rechtecks die eigentlich interessierende Messgröße. Eine naheliegende Möglichkeit zur messtechnischen Bestimmung dieser Fläche stellt die Messung der beiden Kantenlängen a und b dar. Das Messergebnis der Fläche A wird demnach nicht direkt erfasst, sondern indirekt aus der Kenntnis der beiden Kantenlängen a und b ermittelt. Für die Bestimmung der Fläche A werden jedoch nicht nur die Kantenlängen benötigt, sondern es muss darüber hinaus auch ein funktionaler Zusammenhang bekannt sein, welcher für den speziellen Fall eines Rechtecks die bekannten Kantenlängen a und b und die zu bestimmende Fläche A zueinander in Beziehung setzt. Dieser funktionale Zusammenhang $A = f(a, b)$ lautet im vorliegenden Fall offensichtlich:

$$A = a \cdot b$$

Die Messgröße A ist also von den beiden Eingangsgrößen a und b abhängig. Es ist daher einsichtig, dass Abweichungen der Eingangsgrößen a und b sich auf das Ergebnis der Ausgangsgröße A auswirken. Die quantitative Bestimmung des Zusammenhangs zwischen den Abweichungen der Eingangsgrößen und der resultierenden Abweichung der – aus diesen zusammengesetzten – Messgröße ist Gegenstand der Abweichungsrechnung.

Bevor wir mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Berechnungsvorschriften das vollständige Messergebnis der Fläche A des Rechtecks rechnerisch ermitteln, wollen wir anhand einer grafischen Darstellung des vorliegenden, einfachen Problems ein Verständnis für das Grundprinzip der Abweichungsrechnung entwickeln. Hierzu gehen wir zunächst vereinfachend davon aus, dass die tatsächlichen Kantenlängen sich jeweils aus den Nennwerten a bzw. b und den Abweichungen Δa und Δb zusammensetzen. Wenn wir für diese Kantenlängen $a + \Delta a$ und $b + \Delta b$ das resultierende Rechteck grafisch darstellen, gelangen wir zu nachfolgender Abbildung:



Der Nennwert der Fläche, hier grau hinterlegt, beträgt demnach a·b. Weiterhin entstehen durch die Abweichungen Δa und Δb drei weitere Teilflächen, welche in die Gesamtfläche des abweichungsbehafteten Rechtecks einfließen. Betrachten wir zunächst die in obiger Abbildung blau hinterlegte Teilfläche, so stellen wir fest, dass diese einerseits von der Abweichung Δa der ersten Kantenlänge abhängt und andererseits vom Nennwert b der zweiten Kantenlänge. Wie groß der Einfluss der Abweichung Δa auf das Gesamtergebnis ist, hängt also nicht nur vom Betrag der Abweichung selbst ab, sondern auch von einem zugehörigen Empfindlichkeitsfaktor, welcher hier den Wert b aufweist. Ebenso verhält es sich für den aus der Abweichung Δb resultierenden Beitrag zur Gesamtfläche, welcher sich hier zu a·Δb ergibt und in obiger Abbildung grün hinterlegt ist.

Bei der rechnerischen Bestimmung der Abweichungsfortpflanzung gilt es daher nicht nur, die einzelnen Abweichungen zu identifizieren und zu quantifizieren, sondern es sind darüber hinaus auch die jeder abweichungsbehafteten Eingangsgröße zuzuordnenden Empfindlichkeitsfaktoren zu ermitteln.

Betrachten wir schließlich die letzte, in obiger Abbildung rot hinterlegte, Teilfläche, so stellen wir fest, dass diese nur noch von den Abweichungen Δa und Δb selbst abhängt und verglichen mit den anderen Teilflächen nur einen geringen Beitrag zum Gesamtergebnis liefert. Bei dieser Abweichung handelt es sich um eine sogenannte Abweichung höherer Ordnung, welche unter der Annahme, dass die Einzelabweichungen Δa und Δb klein sind im Verhältnis zu den Nennwerten a und b vernachlässigbar klein ist. Tatsächlich handelt es sich bei dem Standardverfahren zur Bestimmung der Abweichungsfortpflanzung um einen linearen Ansatz, bei welchem derartige Abweichungen höherer Ordnung vernachlässigt werden. An obiger grafischer Darstellung lässt sich im Umkehrschluss anschaulich nachvollziehen, weshalb dieses Standardverfahren auch nur bei kleinen Abweichungen (gemessen an den Nenn- bzw. Mittelwerten) sinnvolle Ergebnisse liefert – wären im vorliegenden Beispiel die Abweichungen Δa und Δb größer als die Nennwerte a und b, so hätte die rot hinterlegte Teilfläche den größten Anteil an der Gesamtfläche und dürfte folglich auch nicht vernachlässigt werden.

Nachdem wir oben anschaulich herleiten konnten, dass die beiden relevanten Abweichungsbeträge $b \cdot \Delta a$ und $a \cdot \Delta b$ betragen, stellt sich noch die Frage, welchen Wert dann die Summe beider Abweichungen aufweist. Die Antwort darauf hängt von der statistischen Verteilung der Abweichungen Δa und Δb ab. Da die von uns im Bereich der Messtechnik betrachteten zufälligen Abweichungen in der Regel normalverteilt sind und demnach nicht nur ihrem Betrag nach variieren, sondern zudem sowohl positiv als auch negativ sein können, können sich einzelne Abweichungsanteile bei entgegengesetztem Vorzeichen gegenseitig zumindest teilweise aufheben. Die resultierende Gesamtabweichung ergibt sich daher offensichtlich nicht einfach als Summe der Einzelabweichungen. Wie genau die Berechnung der Gesamtabweichung für den von uns betrachteten Fall normalverteilter, zufälliger Abweichungen erfolgt, sehen wir im Zuge der rechnerischen Bestimmung der Abweichungsfortpflanzung weiter unten.

Die laut Aufgabenstellung geforderte Angabe eines vollständigen Messergebnisses für die gesuchte Fläche A erfordert, wie bereits in vorangegangenen Übungsaufgaben kennengelernt, die Bestimmung eines Konfidenzintervalls für eine vorgegebene Aussagewahrscheinlichkeit, bestehend aus dem Mittelwert der Fläche $\overline{A}$ sowie einer zugeordneten Unsicherheit c_A, welche die Breite des Konfidenzintervalls angibt.

Da es sich bei der gesuchten Ergebnisgröße allgemein um eine von n Eingangsgrößen x_1 bis x_n abhängige Funktion $f(x_1,...,x_n)$ handelt, lautet das Konfidenzintervall laut Vorlesungsskript allgemein:

$$\left[f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) - c_f\ ,\ f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) + c_f\right]$$

Im vorliegenden Fall der Flächenberechnung eines Rechtecks existieren nur die zwei bereits oben diskutierten Eingangsgrößen x_1 und x_2, für die hier gilt:

$$x_1 = a$$
$$x_2 = b$$

Die Funktion $f(x_1, x_2)$ lautet damit wie bereits oben eingeführt:

$$f(x_1, x_2) = A = a \cdot b$$

Wie aus der oben aufgeführten allgemeinen Notation des Konfidenzintervalls zu ersehen, ergibt sich der Mittelwert der Fläche $\overline{A}$ einfach durch Einsetzen der Mittelwerte der Eingangsgrößen in die Bestimmungsgleichung für A. Es gilt hier also:

$$\overline{A} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

Einsetzen der in der Aufgabenstellung gegebenen Zahlenwerte liefert:

$$\overline{A} = 15\,\text{mm} \cdot 10\,\text{mm} = 150\,\text{mm}^2$$

Im nächsten Schritt gilt es, die zugehörige Unsicherheit c_f zu berechnen. Unter der Annahme, dass die abweichungsbehafteten Eingangsgrößen x_1 bis x_n statistisch unabhängig sind, also nicht miteinander korrelieren, ergibt sich diese Unsicherheit laut Vorlesungsskript gemäß:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n} c_{x_i} \right)^2}$$

Betrachten wir diesen Ausdruck näher, so erkennen wir, dass innerhalb der Klammer jeweils das Produkt aus der partiellen Ableitung der Bestimmungsgleichung nach einer der Eingangsgrößen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und der zugehörigen Unsicherheit dieser Eingangsgröße c_{x_i} gebildet wird. Dies spiegelt die bereits oben aus der Anschauung abgeleitete Erkenntnis wieder, dass der Unsicherheitsbeitrag einer einzelnen Eingangsgröße sich jeweils aus der Unsicherheit dieser Eingangsgröße sowie einem durch den funktionalen Zusammenhang definierten Empfindlichkeitsfaktor zusammensetzt.

Die Gesamtheit all dieser Unsicherheitsbeiträge der Einzelgrößen ergibt sich für den Fall zufälliger, normalverteilter Größen, wie aus der Gleichung zu ersehen, als Wurzel aus der Summe über Quadrate aller Unsicherheitsbeiträge.

Für den vorliegenden Fall der zusammengesetzten Messgröße A in Abhängigkeit von den abweichungsbehafteten Eingangsgrößen a und b lautet die Gleichung zur Berechnung der Unsicherheit c_A folglich:

$$c_A = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial A}{\partial a} \right|_{\bar{a},\bar{b}} c_a \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial A}{\partial b} \right|_{\bar{a},\bar{b}} c_b \right)^2}$$

Die Empfindlichkeitsfaktoren in Form der partiellen Ableitungen an der Stelle $\bar{a}$, $\bar{b}$ ergeben sich zu:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial a} \right|_{\bar{a},\bar{b}} = \bar{b} = 10\,\text{mm}$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial b} \right|_{\bar{a},\bar{b}} = \bar{a} = 15\,\text{mm}$$

Die Unsicherheiten c_a und c_b der abweichungsbehafteten Eingangsgrößen a und b müssen im vorliegenden Fall nicht gesondert berechnet werden, da diese bereits in der Aufgabenstellung in geeigneter Weise angegeben sind. Die Unsicherheiten der Größen a und b für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% lauten danach:

$$c_a = 0{,}2\,\text{mm}$$

$$c_b = 0{,}1\,\text{mm}$$

Einsetzen der partiellen Ableitungen und der Unsicherheiten der Eingangsgrößen liefert:

$$c_A = \sqrt{(10\ \mathrm{mm} \cdot 0{,}2\ \mathrm{mm})^2 + (15\ \mathrm{mm} \cdot 0{,}1\ \mathrm{mm})^2} = 2{,}5\ \mathrm{mm}^2$$

Das vollständige Messergebnis der Rechteckfläche A lautet damit im vorliegenden Fall:

$$\mathbf{A = 150\ mm^2 \pm 2{,}5\ mm^2 \quad ; \quad P = 95\%}$$