Lösung zu Aufgabe 4: Konfidenzintervall

a) Abschätzung von Erwartungswert und Standardabweichung:

Wie bereits in Übungsaufgabe 2 eingeführt, stellen der Mittelwert und die Streuung einer Stichprobe die besten Schätzwerte für den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugrunde liegenden Grundgesamtheit dar.

Der arithmetische Mittelwert $\overline{x}$ *von* n *Messwerten errechnet sich gemäß:*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Die empirische Streuung S *von* n *Messwerten errechnet sich gemäß:*

$$S = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Messgröße L:

$$\overline{x} = \overline{L} = 120{,}6\ \text{mm}$$

$$S_L \approx 5{,}4406\ \text{mm}$$

b) Konfidenzintervall des Erwartungswerts:

Da es sich bei dem unter Aufgabenteil a) ermittelten Mittelwert $\overline{L}$, bedingt durch zufällige Abweichungen der Messgröße, nur um einen Schätzwert für den Erwartungswert μ_L der zugehörigen Grundgesamtheit handelt, stellt sich die Frage nach der Unsicherheit dieser Schatzung.

Diese Unsicherheit lässt sich durch Berechnung des sogenannten Konfidenzintervalls quantifizieren. Anschaulich stellt das Konfidenzintervall ein symmetrisch um den besten Schätzwert $\overline{x}$ angeordnetes Intervall dar, innerhalb dessen der tatsächliche, uns unbekannte, Erwartungswert der Grundgesamtheit mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit liegt.

Wir unterscheiden bei normalverteilter Größe X den Fall einer bekannten Standardabweichung und den Fall, dass die Standardabweichung unbekannt ist. Für diese beiden Fälle ergibt sich eine unterschiedliche Vorgehensweise zur Bestimmung des Konfidenzintervalls.

In Aufgabenteil b) wird zunächst davon ausgegangen, dass der Erwartungswert und die Standardabweichung unbekannt sind und daher, wie oben geschehen, durch den Mittelwert und die Streuung einer Stichprobe abgeschätzt werden.

In diesem Fall errechnet sich das Konfidenzintervall für den Erwartungswert gemäß:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} ; \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Das Konfidenzintervall liegt also symmetrisch zum Mittelwert $\overline{x}$, während die Breite des Konfidenzintervalls von der Streuung S, dem Stichprobenumfang n und dem p-Quantil $t_{s;p}$ der Student'schen t-Verteilung abhängt.

Während uns Mittelwert, Streuung und Stichprobenumfang im vorliegenden Fall bereits bekannt sind, muss das p-Quantil $t_{s;p}$ der Student'schen t-Verteilung erst noch bestimmt werden. Das p-Quantil $t_{s;p}$ hängt von zwei Parametern ab – zum einen von der Zahl der Freiheitsgrade s und zum anderen von der statistischen Sicherheit p.

Die Zahl der Freiheitsgrade s beträgt im vorliegenden Fall der Abschätzung des Erwartungswertes einer normalverteilten Messgröße s = (n – 1). Mit n = 10 ergibt sich daher:

$$s = (10 - 1) = 9$$

Die statistische Sicherheit p wird im Allgemeinen je nach Erkenntnisinteresse geeignet gewählt. In unserem Fall ist die statistische Sicherheit durch die Aufgabenstellung vorgegeben.

Laut Aufgabenstellung wird für das Konfidenzintervall eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% (entsprechend 0,95) gefordert. Eine alternative Möglichkeit zur Angabe der Aussagewahrscheinlichkeit stellt das sogenannte Signifikanzniveau α dar. Während, anschaulich betrachtet, die Aussagewahrscheinlichkeit P angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der tatsächliche Erwartungswert *innerhalb* des Konfidenzintervalls liegt, kennzeichnet das Signifikanzniveau α hingegen, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser *außerhalb* des Konfidenzintervalls liegt. Die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten beträgt offensichtlich 1 bzw. 100%. Für den Zusammenhang von Aussagewahrscheinlichkeit P und Signifikanzniveau α gilt daher allgemein:

$$P = 1 - \alpha$$

Die beiden in der Aufgabenstellung gemachten Angaben P = 95% und $\alpha = 0{,}05$ sind daher äquivalent.

Die für die Bestimmung des p-Quantils $t_{s;p}$ benötigte statistische Sicherheit p ergibt sich gemäß obiger Darstellung des Konfidenzintervalls zu:

$$p = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Dass hier mit dem halben Signifikanzniveau gerechnet wird, ist anschaulich so zu deuten, dass unsere Forderung einer Aussagewahrscheinlichkeit von 95% bedeutet, dass zwar mit einer Wahrscheinlichkeit von insgesamt 5% der Erwartungswert außerhalb des Intervalls liegt, dass jedoch wegen der Symmetrie der Verteilung davon jeweils die Hälfte auf den Bereich oberhalb bzw. unterhalb der Intervallgrenzen entfällt. Das p-Quantils $t_{s;p}$ gilt jedoch (ähnlich wie die bereits in Übungsaufgabe 3 eingeführte Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung) für das Intervall von $-\infty$ bis $t_{s;p}$ (vgl. Vorlesungsskript).

Im vorliegenden Fall mit $\alpha = 0{,}05$ ergibt sich die statistische Sicherheit p zu:

$$p = 1 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}975$$

Das zu bestimmende p-Quantil $t_{s;p}$ lautet in unserem Fall damit:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9;\,0{,}975} \qquad \text{mit:} \quad n = 10, \quad \alpha = 0{,}05$$

Den zugehörigen Zahlenwert lesen wir aus der im Anhang des Übungsskiptes zu finden Tabelle 2 ab. Am Schnittpunkt der Zeile s = 9 und der Spalte p = 0,975 finden wir:

$$t_{9;0{,}975} = 2{,}262$$

Die Unsicherheit unseres Schätzwertes des Erwartungswertes beträgt somit:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{5{,}4406\ \text{mm}}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}262 \approx 3{,}892\ \text{mm}$$

Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes μ_L für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% lautet somit:

$$[120{,}6\ \text{mm} - 3{,}892\ \text{mm}; 120{,}6\ \text{mm} + 3{,}892\ \text{mm}]$$

Im Allgemeinen wird für die Angabe eines vollständigen Messergebnisses folgende Darstellung gewählt:

$$L = 120{,}6\ \text{mm} \pm 3{,}892\ \text{mm}; \quad P = 95\%$$

oder alternativ

$$L = 120{,}6\ \text{mm} \pm 3{,}892\ \text{mm}; \quad \alpha = 0{,}05$$

Wichtig ist, zu beachten, dass ein vollständiges Messergebnis stets aus folgenden Komponenten besteht:

1. dem eigentlichen Messwert
2. der quantitativen Angabe der Unsicherheit
3. der Einheit des Messergebnisses
4. der Angabe der statistischen Sicherheit

c) Anzahl der erforderlichen Wiederholungen bei unbekanntem σ:

Während in Aufgabenteil b) aus einer vorliegenden Stichprobe das Konfidenzintervall des Erwartungswertes berechnet werden sollte, steht man in der Praxis im Vorfeld einer Stichprobenentnahme häufig zunächst vor der umgekehrten Fragestellung, nämlich welchen Umfang eine Stichprobe mindestens aufweisen muss, um mit einer geforderten statistische Sicherheit den Erwartungswert mit einer bestimmten Unsicherheit abschätzen zu können.

In Aufgabenteil c) bestimmen wir daher unter der Annahme, dass uns – ebenso wie unter Aufgabenteil b) – Erwartungswert und Standardabweichung der Grundgesamtheit unbekannt sind, den mindestens benötigten Stichprobenumfang, um für den Schätzwert des Erwartungswertes bei einer statistischen Sicherheit von $P = 95\%$ eine maximale Unsicherheit von $c = \pm 3$ mm zu erhalten. Unsere Forderung lautet also:

$$\frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \overset{!}{\leq} 3 \text{ mm}$$

Da sowohl der Nennerausdruck $\sqrt{n}$ als das p-Quantil $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ vom gesuchten Stichprobenumfang n abhängen, können wird obige Ungleichung nicht nach n auflösen und daher auch nicht analytisch lösen. Stattdessen muss die Lösung hier iterativ oder durch geschicktes „Ausprobieren“ erfolgen.

Wir berechnen daher zunächst testweise das Ergebnis für einen Stichprobenumfang von $n = 15$. Mit $n = 15$ und $\alpha = 0{,}05$ sowie unter Verwendung der Tabelle des p-Quantils der Student’schen t-Verteilung erhalten wir:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{14;0,975} = 2{,}145$$

Setzen wir weiterhin das ermittelte p-Quantil, die unter Aufgabenteil a) berechnete Streuung sowie den getesteten Stichprobenumfang in obige Ungleichung ein, erhalten wir:

$$\frac{5{,}4406 \text{ mm}}{\sqrt{15}} \cdot 2{,}145 \approx 3{,}013 \text{ mm} \leq 3 \text{ mm}$$

Wie wir erkennen, ist für einen Stichprobenumfang von $n = 15$ unsere Forderung knapp noch nicht erfüllt. Wir erhöhen den getesteten Stichprobenumfang daher auf $n = 16$ und erhalten damit:

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{15;0,975} = 2{,}131$$

$$\frac{5{,}4406 \text{ mm}}{\sqrt{16}} \cdot 2{,}131 \approx 2{,}898 \text{ mm} \leq 3 \text{ mm}$$

Für einen Stichprobenumfang von $n = 16$ unterschreitet die berechnete Unsicherheit also den geforderten Wert von ±3 mm. Die Antwort auf die gestellte Frage lautet somit:

Um den Erwartungswert mit einer statistischen Sicherheit von P = 95% mit einer Unsicherheit von höchstens ±3 mm abschätzen zu können, ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 16 erforderlich!

c) Anzahl der erforderlichen Wiederholungen bei bekanntem σ:

Wenn über den Prozess, dessen Erwartungswert mit Hilfe einer Stichprobe ermittelt werden soll, zusätzliche Informationen vorliegen (etwa aus einer langfristigen Beobachtung), so kann die Standardabweichung des Prozesses möglicherweise bekannt sein und muss daher nicht erst aus der Stichprobe selbst abgeschätzt werden. Durch diese zusätzliche Information verringert sich die Unsicherheit unserer Abschätzung des Erwartungswertes, wodurch bereits ein geringerer Stichprobenumfang ausreichend ist, um eine vergleichbar geringe Unsicherheit zu erzielen.

Für den Fall einer bekannten Standardabweichung σ lautet das Konfidenzintervall:

$$\left[\overline{x}-\frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}+\frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Im direkten Vergleich mit dem oben betrachteten Konfidenzintervall für unbekanntes σ, tritt an die Stelle der empirischen Streuung S die nun bekannte Standardabweichung σ und an die Stelle des p-Quantils $t_{s;p}$ der Erweiterungsfaktor k. Der Erweiterungsfaktor k stellt eine auf die Standardabweichung normierte Intervallbreite dar:

$$k=\frac{c_{P\%}}{\sigma}$$

Diesen Faktor können wir für spezielle Werte der Tabelle 2.2 des Vorlesungsskripts entnehmen. Alternativ können wir jedoch auch die Tabelle des p-Quantils $t_{s;p}$ der Student'schen t-Verteilung verwenden, da der Erweiterungsfaktor k den Grenzwert des p-Quantils $t_{s;p}$ für den Grenzfall $n\rightarrow\infty$ darstellt:

$$k(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\left(t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Für den von uns benötigten Faktor k zu einer statistischen Sicherheit von 95% gilt daher:

$$k(\alpha=0{,}05)=t_{\infty;\,0{,}975}$$

Den zugehörigen Zahlenwert entnehmen wir der Tabelle des p-Quantils $t_{s;p}$ der Student'schen t-Verteilung:

$$t_{\infty;\,0{,}975}=1{,}96$$

Unsere Forderung für das vom Stichprobenumfang n abhängige Konfidenzintervall lautet im vorliegenden Fall für bekannte Standardabweichung σ:

$$\frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\overset{!}{\leq}3\text{ mm}$$

Da der gesuchte Stichprobenumfang n hier nur noch an einer Stelle auftaucht, können wir die Ungleichung nach n umstellen und erhalten:

$$\sqrt{n} \geq \frac{k \cdot \sigma}{3\ \mathrm{mm}}$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{k \cdot \sigma}{3\ \mathrm{mm}} \right)^2$$

Mit dem oben ermittelten Erweiterungsfaktor k und der in der Aufgabenstellung als bekannt vorgegebenen Standardabweichung von σ = 5,5 mm führt das Einsetzen der Zahlenwerte zu:

$$n \geq \left(\frac{1{,}96 \cdot 5{,}5\ \mathrm{mm}}{3\ \mathrm{mm}} \right)^2 = 12{,}9120\overline{4}$$

Da der Stichprobenumfang naturgemäß nur ein ganzzahliger Wert sein kann, runden wir den berechneten Wert auf die nächste ganze Zahl auf. Die Antwort auf die gestellte Frage lautet somit:

Um unter der Annahme einer bekannten Standardabweichung von σ = 5,5 mm den Erwartungswert mit einer statistischen Sicherheit von P = 95% mit einer Unsicherheit von höchstens ±3 mm abschätzen zu können, ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 13 erforderlich!