Lösung zu Aufgabe 12: Chi²-Test auf Gleichverteilung

Die grundsätzliche Vorgehensweise beim Chi²-Test, welche bereits in Übungsaufgabe 11 anhand der Überprüfung auf Vorliegen einer Normalverteilung ausführlich erläutert wurde, unterscheidet sich für unterschiedliche Verteilungsfunktionen nicht. Stets gilt es, eine normierte Differenz zwischen dem tatsächlich beobachteten Histogramm und einem unter Annahme der Gültigkeit der jeweiligen Hypothese berechneten, theoretischen Histogramm zu bestimmen. Der wesentliche Unterschied bei Überprüfung auf verschiedene Verteilungsfunktionen besteht lediglich in der Herkunft der Daten des theoretischen Histogramms, also der Frage, wie diese berechnet oder wo diese abgelesen werden können.

Im vorliegenden Fall soll überprüft werden, ob ein Würfel tatsächlich das als „fair" bezeichnete Verhalten aufweist, dass alle Augenzahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen werden. Mathematisch wird dieses Verhalten durch eine diskrete Gleichverteilung beschrieben.

Die für den Test benötigten theoretischen Häufigkeiten E_i ergeben sich durch die Überlegung, dass bei gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit für alle sechs möglichen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Augenzahl bei 1/6 liegt. Für die Wahrscheinlichkeiten p_i für jede der Augenzahlen gilt also:

$$p_i = \frac{1}{6} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Mit dem Stichprobenumfang von $n = 300$ ergibt sich für die absoluten Häufigkeiten $E_i = n \cdot p_i$ folglich:

$$E_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50 \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Die Testgröße χ_0^2 ergibt sich auf Grundlage der B_i und E_i gemäß folgender Tabelle:

Augenzahl	B_i	E_i	$\frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$
1	42	50	1,28
2	51	50	0,02
3	56	50	0,72
4	48	50	0,08
5	52	50	0,08
6	51	50	0,02
		Σ	2,2

Die Testgröße beträgt somit:

$$\chi_0^2 = 2{,}2$$

Zur Feststellung des kritischen Wertes $\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$, mit welchem die berechnete Testgröße zu vergleich ist, wird zunächst die Zahl der Freiheitsgrade benötigt, für welche wie zuvor gilt:

$$FG = r^* - s - 1$$

Die Anzahl r* der auswertbaren Klassen beträgt entsprechend der Anzahl der möglichen Augenzahlen:

$$r^* = 6$$

Die Zahl s der Parameter der Verteilungsfunktion, welche aus der Stichprobe abgeschätzt wurden beträgt im vorliegenden Fall

$$s = 0 \quad ,$$

da kein Parameter aus der Stichprobe abgeschätzt werden musste. Die Eigenschaften der zu überprüfenden Verteilungsfunktion – einer diskreten Gleichverteilung mit sechs möglichen Merkmalsausprägungen – wurden durch theoretische Überlegung aus der Fragestellung selbst und dem Verständnis des Verhaltens eines fairen Würfels abgeleitet.

Es gilt somit:

$$r^* - s - 1 = 6 - 0 - 1 = 5$$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α beträgt laut Aufgabenstellung:

$$\alpha = 0{,}05$$

Für den kritischen Wert $\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$ gilt im vorliegenden Fall also:

$$\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha} = \chi^2_{5;0,95} = 11{,}1 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Die auszuwertende Testbedingung lautet damit:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{5;0,95} \quad ?$$

Mit den zuvor ermittelten Zahlenwerten für Testgröße und kritischen Wert ist also überprüfen, ob gilt:

$$2{,}2 > 11{,}1$$

Die Testbedingung ist offensichtlich nicht erfüllt. Da für denn Fall, dass die Testbedingung erfüllt ist, die Nullhypothese abgelehnt wird, schließen wir aus der Nichterfüllung der Testbedingung:

Die Nullhypothese wird *nicht* abgelehnt!

Da unsere Nullhypothese lautet, dass der getestete Würfel ein als fair bezeichnetes Verhalten aufweist, dass also die mit ihm gewürfelten Augenzahlen einer diskreten Gleichverteilung genügen, schließen wir aus dem Testergebnis weiterhin:

Der Würfel kann auf einem Signifikanzniveau α = 0,05 als fair angesehen werden!