Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $\eta = f(M, H, R_i, R_{ia}, \omega)$ mit P = 98%:

Die gegebene Gleichung kann direkt in der vorliegenden Form verwendet werden:

$$\eta = \frac{M}{4\pi \cdot H \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

Abweichungsbehaftete Einflussgrößen: M, R_i, R_{ia}, ω

Gegebenen Radius R_a in SI-Basiseinheiten und von P = 99% auf P = 98% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit sehr großem n folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{\infty;0,99} = 2,33$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{\infty;0,995} = 2,58$$

$$\Rightarrow \quad c_{R_a;98\%} = 3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \cdot \frac{2,33}{2,58} \approx 2,7093 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

$$R_a = 7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \pm 2,7093 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m};\ \ P = 98\%$$

Gegebenen Radius R_i in SI-Basiseinheiten umrechnen:

Gegeben: $$R_i = 60\,\mathrm{mm} \pm 0,2\,\mathrm{mm};\ \ P = 98\%$$

$$\Rightarrow \quad R_i = 6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} \pm 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m};\ \ P = 98\%$$

Für ω angegebene relative Messunsicherheit in Absolutwert umrechnen:

Gegeben: Anzeigewert: $\omega = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1}$
Unsicherheit: 0,5% vom Anzeigewert bei P = 98%

$$\Rightarrow \quad \omega = 4\pi\,\mathrm{s}^{-1} \pm \frac{1}{50}\pi\,\mathrm{s}^{-1};\ \ P = 98\%$$

$$\left(\omega \approx 12,56637\,\mathrm{s}^{-1} \pm 0,06283\pi\,\mathrm{s}^{-1};\ \ P = 98\% \right)$$

Berechnung des vollständigen Messergebnisses des Moments M aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\overline{M} = 31{,}7225\ \mathrm{Ncm} = 0{,}317225\ \mathrm{Nm}$

Streuung: $s_M \approx 0{,}09004\ \mathrm{Ncm} = 9{,}004 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm}$

Vertrauensbereich: $c_M = \frac{s_M}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}02$

folgt:

$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{7;0,99} = 3{,}00$

$$\Rightarrow \quad c_M = \frac{9{,}004 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm}}{\sqrt{8}} \cdot 3 \approx 9{,}5502 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm}$$

$M = 0{,}317225\ \mathrm{Nm} \pm 9{,}5502 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{Nm};\ \ P = 98\%$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{T}$:

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{M}}{4\pi \cdot H \cdot \overline{\omega}} \cdot \left(\frac{1}{\overline{R}_i^2} - \frac{1}{\overline{R}_a^2} \right) = \frac{0{,}317225\ \mathrm{Nm \cdot s}}{4\pi \cdot 0{,}1\ \mathrm{m} \cdot 4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(0{,}06\ \mathrm{m})^2} - \frac{1}{(0{,}07\ \mathrm{m})^2} \right) \approx 1{,}4804\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial M}\right|_{\overline{M},\overline{R}_i,\overline{R}_a,\overline{\omega}} = \frac{1}{4\pi \cdot H \cdot \overline{\omega}} \cdot \left(\frac{1}{\overline{R}_i^2} - \frac{1}{\overline{R}_a^2} \right) \approx 4{,}6669\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial R_i}\right|_{\overline{M},\overline{R}_i,\overline{R}_a,\overline{\omega}} = -\frac{\overline{M}}{2\pi \cdot H \cdot \overline{\omega} \cdot \overline{R}_i^3} \approx -186{,}0047\ \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial R_a}\right|_{\overline{M},\overline{R}_i,\overline{R}_a,\overline{\omega}} = \frac{\overline{M}}{2\pi \cdot H \cdot \overline{\omega} \cdot \overline{R}_a^3} \approx 117{,}1342\ \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial \omega}\right|_{\overline{M},\overline{R}_i,\overline{R}_a,\overline{\omega}} = -\frac{\overline{M}}{4\pi \cdot H \cdot \overline{\omega}^2} \cdot \left(\frac{1}{\overline{R}_i^2} - \frac{1}{\overline{R}_a^2} \right) \approx -0{,}1178\ \frac{\mathrm{N \cdot s^2}}{\mathrm{m}^2}$$

Vertrauensbereich c_T:

$$c_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial M}\cdot c_M\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial R_i}\cdot c_{R_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial R_a}\cdot c_{R_a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\cdot c_\omega\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_\eta = \sqrt{\left(4{,}6669\cdot 9{,}5502\cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(-186{,}0047\cdot 2\cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(117{,}1342\cdot 2{,}7093\cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(-0{,}1178\cdot 0{,}0628\right)^2}\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

$$c_\eta \approx 0{,}0498\ \mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$$

Vollständiges Messergebnis für die dynamische Viskosität η:

η = 1,4804 Pa·s ± 0,0498 Pa·s ; P = 98%

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Mittelwert und Streuung:

Mittelwert: $\overline{\eta} = 95{,}9\overline{6}\ \mathrm{mPa \cdot s}$

Streuung: $s_\eta \approx 2{,}2843\ \mathrm{mPa \cdot s}$

b) Konfidenzintervall:

$$c_\eta = \frac{s_\eta}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 9$
$\alpha = 0{,}02$

$\Rightarrow \quad t_{8;0{,}99} = 2{,}90$

$$c_\eta = \frac{2{,}2843\ \mathrm{mPa \cdot s}}{\sqrt{9}} \cdot 2{,}90 \approx 2{,}2082\ \mathrm{mPa \cdot s}$$

$$\eta = 95{,}9\overline{6}\ \mathrm{mPa \cdot s} \pm 2{,}2082\ \mathrm{mPa \cdot s};\ \ P = 98\%$$

c) Stichprobenumfang für $c_\eta \le 1\ \mathrm{mPa \cdot s}$:

Das Konfidenzintervall bei bekanntem σ lautet:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Gesucht wird der minimale Stichprobenumfang n, für den gilt:

$$\frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \overset{!}{\le} 1\ \mathrm{mPa \cdot s}$$

$$\Leftrightarrow \qquad n \overset{!}{\ge} \left(\frac{k \cdot \sigma}{1\ \mathrm{mPa \cdot s}}\right)^2$$

gegeben: $\sigma_\eta = 2\ \mathrm{mPa \cdot s}$

$$k(\alpha = 0{,}01) = t_{\infty;0{,}995} = 2{,}58$$

$\Rightarrow \quad n \ge 26{,}6256$

Um die Unsicherheit auf $c_\eta \leq 1\,\text{mPa}\cdot\text{s}$ abschätzen zu können, ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 27 erforderlich!

d) Liegen mindestens 95% der Ölkanister im geforderten Intervall?

Es erfüllen nur solche Kanister die Spezifikation, bei denen die dynamische Viskosität des Öls im Intervall $90\,\text{mPa}\cdot\text{s} \leq \eta \leq 100\,\text{mPa}\cdot\text{s}$ liegt.

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

hier: $$z_{max} = \frac{100\,\text{mPa}\cdot\text{s} - 95{,}9\overline{6}\,\text{mPa}\cdot\text{s}}{2{,}2843\,\text{mPa}\cdot\text{s}} \approx 1{,}77$$

$$z_{min} = \frac{90\,\text{mPa}\cdot\text{s} - 95{,}9\overline{6}\,\text{mPa}\cdot\text{s}}{2{,}2843\,\text{mPa}\cdot\text{s}} \approx -2{,}61$$

$\Phi(z_{max} = 1{,}77) = 0{,}961636$ (aus Tabelle)

$\Phi(z_{min} = -2{,}61) = 1 - \Phi(-z_{min} = 2{,}61) = 1 - 0{,}995473 = 0{,}004527$ (aus Tabelle)

Innerhalb des Intervalls $[z_{min}; z_{max}]$ liegen folglich:

$$\Phi(z_{max}) - \Phi(z_{min}) = 0{,}961636 - 0{,}004527 \approx 0{,}957109 \approx 95{,}71\%$$

Insgesamt liegt bei ca. 95,71% der produzierten Kanister die dynamische Viskosität des Öls im geforderten Intervall. Die mit dem Abnehmer der Kanister vereinbarte Spezifikation von mindestens 95% wird somit erfüllt!

e) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich des Erwartungswertes μ_{CO_2} aus zwei Versuchsreihen mit unterschiedlichem Öl
- Da die beiden Messreihen nacheinander mit denselben Fahrzeugen durchgeführt werden, sind die beiden Messreihen nicht unabhängig sondern miteinander verbunden.

⇒ t-Test für verbundene Stichproben

- Es soll überprüft werden, oder der Erwartungswert des CO_2-Ausstoßes bei Verwendung des Hochleistungsöls (Öl "B") **gleich** dem CO_2-Ausstoß bei Verwendung des Standardöls (Öl "A") ist, oder ob der CO_2-Ausstoß, wie vom Hersteller behauptet, bei Verwendung des Hochleistungsöls **niedriger** ist!

⇒ einseitige Hypothese

- Im Vorfeld des Tests der einseitigen Hypothese muss eine Zuordnung der Variablen x und y zu den Messgrößen erfolgen:

  $x \mathrel{\widehat{=}}$ CO_2-Ausstoß mit Öl "B"

  $y \mathrel{\widehat{=}}$ CO_2-Ausstoß mit Öl "A"

- Mit $d_i = x_i - y_i$ (siehe Hilfsmittel) ist also zu überprüfen, ob $\mu_d = 0$ oder $\mu_d < 0$:

$\Rightarrow \quad H_0: \mu_d = 0 \quad \widehat{=}$ es gibt keinen Unterschied

gegen $H_1: \mu_d < 0 \quad \widehat{=}$ der CO_2-Ausstoß mit Öl "B" ist geringer als mit Öl "A"

Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

mit

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Berechnung der Differenzen d_i:

Fahrzeug	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Öl "A": CO_2 / g/km ($\widehat{=}y$)	125,8	187,2	108,7	246,7	143,8	137,5	167,4	152,8
Öl "B": CO_2 / g/km ($\widehat{=}x$)	123,4	186,7	108,9	240,3	144,2	133,8	163,9	154,9
$d_i = x_i - y_i$	–2,4	–0,5	0,2	–6,4	0,4	–3,7	–3,5	2,1

Mittelwert der Differenzen: $\overline{d} = -1{,}725 \frac{g}{km}$

Streuung der Differenzen: $s_d \approx 2{,}77 \frac{g}{km}$

mit: $n = 8$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{-1{,}725}{2{,}77 / \sqrt{8}} \approx -1{,}76$$

Vergleichswert: $t_{n-1;1-\alpha}$ mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}05$

$\Rightarrow$ $t_{7;0{,}95} = 1{,}89$

Test: $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$

hier: $-1{,}76 < -1{,}89$ ↯

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ entspricht der Erwartungswert des CO_2-Ausstoßes bei Verwendung des Hochleistungsöls dem CO_2-Ausstoß bei Verwendung des Standardöls. Die vom Hersteller behauptete Reduzierung des CO_2-Ausstoßes bei Verwendung des Hochleistungsöls kann damit auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als widerlegt gelten.

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung des Geräteparameters K für α = 0,02:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Hier gegeben:

$$\eta = \frac{M}{\omega} \cdot K$$

Umstellen der Gleichung liefert:

$$\omega = \frac{M}{\eta} \cdot K$$

Mit $K \equiv b$ gilt weiterhin:

$$\frac{M}{\eta} \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad \omega \mathrel{\hat{=}} y$$

x-y-Wertepaare bestimmen:

x / m³/s	y / s^{-1}
0,033784	1,51
0,067568	2,95
0,101351	4,39
0,135135	5,93
0,168919	7,58
0,202703	9,05
0,236486	10,88
0,270270	12,11
0,304054	13,83
0,337838	14,96

Mittelwerte:

$$\bar{x} = 0{,}1858\ \frac{m^3}{s}$$

$$\bar{y} = 8{,}319\ s^{-1}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b \approx 45{,}2306\ \mathrm{m}^{-3}$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 0{,}022868\ \mathrm{s}^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 0{,}15122\ \mathrm{s}^{-1}$$

Vertrauensbereich u_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 10$$

$$\alpha = 0{,}02$$

$t_{8;0,99} = 2{,}90$ (siehe Tabelle)

$$s_x \approx 0{,}1023\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 1{,}3556\ \mathrm{m}^{-3}$$

Ergebnis:

$$K \equiv b \approx 45{,}2306\ \mathrm{m}^{-3} \pm 1{,}3556\ \mathrm{m}^{-3} \quad ; \alpha = 0{,}02$$

b) Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit ω für M^* = 42 Ncm bei α = 0,01:

gegeben:

$$x \mathrel{\hat{=}} \frac{M}{\eta} \quad ; \quad M^* = 42\ \mathrm{Ncm} = 0{,}42\ \mathrm{Nm} \quad ; \quad \eta = 1{,}48\ \mathrm{Pa \cdot s}$$

$$\Rightarrow \qquad x^* = 0{,}2\overline{837}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

$$\Rightarrow \qquad y^* \approx 12{,}75\ \mathrm{s}^{-1}$$

Vertrauensbereich für y^*:

$$c_{y^*} = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}} \qquad \text{mit:} \quad n = 10$$

$$\alpha = 0{,}01$$

$t_{8;0,995} = 3{,}36$ (siehe Tabelle)

$$\Rightarrow \quad c_{y^*} \approx 0{,}223\,s^{-1}$$

Ergebnis:

$$\omega = 12{,}75\,s^{-1} \pm 0{,}223\,s^{-1} \;\; ; \;\; \alpha = 0{,}01$$

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems, bei denen es sich um extensive Größen handelt!**

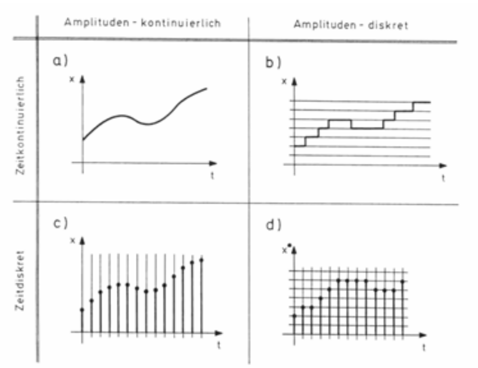
   Masse, Länge, Zeit, elektrische Stromstärke, Stoffmenge, Lichtstärke

2. **Welche beiden Arten von Fehlentscheidung können bei einem statistischen Test auftreten? Erläutern Sie diese!**

   Fehlentscheidung 1. Art: Ablehnung von H_0, obwohl H_0 richtig ist.

   Fehlentscheidung 2. Art: Nichtablehnung von H_0, obwohl H_0 falsch ist.

3. **Erläutern Sie die Begriffspaare zeitkontinuierlich / zeitdiskret sowie amplitudenkontinuierlich / amplitudendiskret und skizzieren Sie die vier somit möglichen Signalarten!**
   - Zeitkontinuierlich: Zu jedem Zeitpunkt hat das Signal einen definierten Wert.
   - Zeitdiskret: Das Signal hat nur zu bestimmten Zeitpunkten einen definierten Wert.
   - Amplitudenkontinierlich: Das Signal kann (innerhalb eines bestimmten Wertebereichs) beliebige Zwischenwerte annehmen.
   - Amplitudendiskret: Das Signal kann nur bestimmte (quantisierte) Werte annehmen.



4. **Sie sitzen bei leichtem Regen auf der Terrasse eines Cafés und beobachten, wie Regentropfen in Ihre Tasse fallen. Je Minute sind es durchschnittlich 8 Tropfen.**
   a) Durch welche statistische Verteilung wird dieser Vorgang beschrieben?
   b) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Tropfen in 18 Minuten?
   c) Wie groß ist die Standardabweichung für den Erwartungswert aus b)?

   zu a): Poisson-Verteilung (1 Punkt)

   zu b): 144 Tropfen (1 Punkt)

   zu c): 12 Tropfen (1 Punkt)

5. **Ist die Aussage „Die Messunsicherheit kann beliebig klein gemacht werden, wenn man ausreichend viele Wiederholungen der Messung durchführt“ richtig? Begründen Sie Ihre Aussage!**

   Nein, denn der systematische Abweichungsanteil kann durch wiederholte Messung nicht reduziert werden.

6. Die Wechselwirkung zwischen Messeinrichtung und Messobjekt führt stets zu Messabweichungen. In der Vorlesung wurden drei Möglichkeiten diskutiert, mit diesen Abweichungen umzugehen. Nennen Sie diese!

a) Beeinflussung vernachlässigbar klein → Messwerte können übernommen werden

b) Beeinflussung nicht vernachlässigbar →

ba) Rechnerische Korrektur der Messwerte vor weiterer Nutzung

bb) Anwendung eines Kompensationsverfahrens

7. Erläutern sie die drei nachfolgend genannten Begriffe und nennen Sie zu jedem davon ein Beispiel:

a) direkte Messverfahren im engeren Sinne

b) direkte Messverfahren im erweiterten Sinne

c) indirekte Messverfahren

Direkte Messverfahren im engeren Sinne: Der gesuchte Messwert einer Messgröße wird durch unmittelbaren Vergleich mit einem Normal derselben Messgröße gewonnen, z.B. Längenmessung mit Maßstab, Wägung durch Vergleich mit kalibrierten Gewichten,...

Direkte Messverfahren im erweiterten Sinne: Der Messwert wird direkt auf einer kalibrierbaren Anzeige angezeigt, z.B. Stromstärkemessung mit Drehspulinstrument, Temperaturmessung mit Flüssigkeitsthermometer,...

Indirekte Messverfahren: Der gesuchte Messwert wird auf andersartige Messgrößen zurückgeführt und muss aus diesen unter Verwendung bekannter physikalischer Prinzipien ermittelt werden, z.B. Druckmessung aus Kraft- und Flächenmessung,...

8. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

Hinreichende Bedingung: Wenn das Abtasttheorem eingehalten wird, wird bereits alleine dadurch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals ermöglicht.

Nicht notwendige Bedingung: Auch wenn das Abtasttheorem nicht eingehalten wird, ist prinzipiell noch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals möglich, beispielsweise unter Einbeziehung von Zusatzinformationen.

9. Aus welchen Elementen besteht ein vollständiges Messergebnis?

- Schätzung des Wertes der Messgröße (Zahlenwert)
- Schätzung der Unsicherheit dieser Schätzung (Zahlenwert)
- Einheit

10. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -10 V bis 10 V wird mittels eines 16 Bit A/D-Umsetzers digitalisiert. Wie groß ist der maximale Quantisierungsfehler?

Der maximale Quantisierungsfehler entspricht der halben Auflösung und beträgt somit ungefähr $1{,}526 \cdot 10^{-4}$ V. (Berechnung: $\frac{1}{2} \cdot \frac{20\text{V}}{2^{16}}$)