Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $q_v = f(S, d, A, f)$ mit P = 99%:

Die gegebene Gleichung kann direkt in der vorliegenden Form verwendet werden:

$$q_v = \frac{1}{S} \cdot d \cdot A \cdot f$$

Abweichungsbehaftete Einflussgrößen: S, A, f (d kann laut Aufgabenstellung als exakt angesehen werden)

Die gegebene Strouhal-Zahl S kann im vorliegenden Fall unverändert verwendet werden.

Gegeben: $S = 0{,}2 \pm 0{,}0015;\ P = 99\%$

Die gegebene, als exakt anzusehende charakteristische Breite d muss im vorliegenden Fall lediglich auf die SI-Basiseinheit umgerechnet werden.

Gegeben: $d = 25{,}4\ \mathrm{mm} = 0{,}0254\ \mathrm{m}$

Die gegebenen Querschnittsfläche A von P = 95% auf P = 99% und in SI-Basiseinheit umrechnen:

allgemein: $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$

mit n = 20 folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{19;0,975} = 2{,}09$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{19;0,995} = 2{,}86$$

$$\Rightarrow \quad c_{A;99\%} = 0{,}03\ \mathrm{dm}^2 \cdot \frac{2{,}86}{2{,}09} \approx 0{,}04105\ \mathrm{dm}$$

$$\begin{aligned} A &= 5\ \mathrm{dm}^2 \pm 0{,}04105\ \mathrm{dm}^2;\ P = 99\% \\ &= 0{,}05\ \mathrm{m}^2 \pm 4{,}105 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2;\ P = 99\% \end{aligned}$$

Berechnung des vollständigen Messergebnisses der Wirbelfrequenz f aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\bar{f} \approx 12{,}00111\ \mathrm{Hz}$

Streuung: $S_f \approx 0{,}043716\ \mathrm{Hz}$

Vertrauensbereich: $c_f = \frac{S_f}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 9$

$\alpha = 0{,}01$

folgt:

$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{8;0{,}995} = 3{,}36$

$$\Rightarrow \quad c_f = \frac{0{,}043716\ \text{Hz}}{\sqrt{9}} \cdot 3{,}36 \approx 0{,}048962\ \text{Hz}$$

$$f = 12{,}00111\ \text{Hz} \pm 0{,}048962\ \text{Hz}\,; \quad P = 99\%$$
$$= 12{,}00111\ \frac{1}{s} \pm 0{,}048962\ \frac{1}{s}\,; \quad P = 99\%$$

Berechnung des Mittelwertes q_v:

$$q_v = \frac{1}{\overline{S}} \cdot d \cdot \overline{A} \cdot \overline{f} = \frac{1}{0{,}2} \cdot 0{,}0254\ m \cdot 0{,}05\ m^2 \cdot 12{,}00111\ \frac{1}{s} \approx 0{,}076207\ \frac{m^3}{s}$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial q_v}{\partial S}\right|_{\overline{S},\overline{A},\overline{f},d} = -\frac{1}{\overline{S}^2} \cdot d \cdot \overline{A} \cdot \overline{f} \approx -0{,}381035\ \frac{m^3}{s}$$

$$\left.\frac{\partial q_v}{\partial A}\right|_{\overline{S},\overline{A},\overline{f},d} = \frac{1}{\overline{S}} \cdot d \cdot \overline{f} \approx 1{,}524141\ \frac{m}{s}$$

$$\left.\frac{\partial q_v}{\partial f}\right|_{\overline{S},\overline{A},\overline{f},d} = \frac{1}{\overline{S}} \cdot d \cdot \overline{A} = 0{,}00635\ m^3$$

Vertrauensbereich c_9:

$$c_{q_v} = \sqrt{\left(\frac{\partial q_v}{\partial S} \cdot c_S\right)^2 + \left(\frac{\partial q_v}{\partial A} \cdot c_A\right)^2 + \left(\frac{\partial q_v}{\partial f} \cdot c_f\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_{q_v} = \sqrt{(-0{,}381035 \cdot 0{,}0015)^2 + (1{,}524141 \cdot 4{,}105 \cdot 10^{-4})^2 + (0{,}00635 \cdot 0{,}048962)^2}\ \frac{m^3}{s}$$

$$c_{q_v} \approx 0{,}00090266\ \frac{m^3}{s} = 9{,}0266 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}$$

Vollständiges Messergebnis für den Volumendurchfluss q_v:

$$q_v = 0{,}076207\,\frac{m^3}{s} \pm 9{,}027 \cdot 10^{-4}\,\frac{m^3}{s}; \quad P = 99\%$$

$$= 76{,}207\,\frac{dm^3}{s} \pm 0{,}9027\,\frac{dm^3}{s}; \quad P = 99\%$$

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Konfidenzintervall:

Mittelwert: $\overline{d} \approx 14{,}9995\text{ mm}$

Streuung: $s_d \approx 0{,}009856\text{ mm}$

$$c_d = \frac{s_d}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 8$
$\alpha = 0{,}01$

$\Rightarrow \quad t_{7;0{,}995} = 3{,}50$

$$c_d = \frac{0{,}009856\text{ mm}}{\sqrt{8}} \cdot 3{,}50 \approx 0{,}012196\text{ mm}$$

$$d = 14{,}9995\text{ mm} \pm 0{,}012196\text{ mm};\ \ P = 99\%$$

b) Stichprobenumfang für Vertrauensbereich von weniger als ±5 µm.

Das Konfidenzintervall bei unbekanntem σ lautet:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Gesucht wird der minimale Stichprobenumfang n, für den gilt:

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2} \overset{!}{<} 5\,\mu\text{m} \qquad \text{mit:} \quad s = 0{,}009856\text{ mm} \quad \text{(wie unter a) ermittelt)}$$

$$\alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad 1-\alpha/2 = 0{,}995$$

$$\Rightarrow \quad \frac{t_{n-1;0{,}995}}{\sqrt{n}} \overset{!}{<} \frac{5\,\mu\text{m}}{9{,}856\,\mu\text{m}} \approx 0{,}507305$$

gesucht: erforderlicher Stichprobenumfang n

für n = 29: $\frac{t_{n-1;0{,}995}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}76}{\sqrt{29}} \approx 0{,}5125$

für n = 30: $\frac{t_{n-1;0{,}995}}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}75}{\sqrt{30}} \approx 0{,}5021$

Es ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 30 erforderlich, um bei einer Aussagesicherheit von P = 99 % den Erwartungswert der charakteristischen Breite d mit einer Unsicherheit von weniger als ±5 µm abzuschätzen.

c) Liegen maximal 2% der Maße außerhalb des geforderten Intervalls?

Es erfüllen nur solche Prallelemente die Spezifikation, bei denen die charakteristische Breite d um nicht mehr als 0,15% des Nennwerts von diesem abweicht. Mit einem Nennwert von d_{nenn} = 15 mm folgt für die maximale Abweichung Δd:

$$\Delta d = 0{,}0015 \cdot 15 \text{ mm} = 0{,}0225 \text{ mm}$$

Das Intervall symmetrisch um den Erwartungswert, innerhalb dessen die Maße liegen sollen lautet damit:

$$\left[14{,}9775 \text{ mm}; 15{,}0225 \text{ mm}\right]$$

Da maximal 2% aller gefertigten Prallelemente außerhalb dieses Intervalls liegen dürfen, müssen zur Erfüllung der Spezifikation als mindestens 98% innerhalb des oben berechneten Intervalls liegen.

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Als Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung dienen Mittelwert und Streuung der Stichprobe wie unter a) berechnet:

Mittelwert: $\overline{d} \approx 14{,}9995 \text{ mm}$

Streuung: $s_d \approx 0{,}009856 \text{ mm}$

hier: $$z_{max} = \frac{15{,}0225 \text{ mm} - 14{,}9995 \text{ mm}}{0{,}009856 \text{ mm}} \approx 2{,}33$$

$$z_{min} = \frac{14{,}9775 \text{ mm} - 14{,}9995 \text{ mm}}{0{,}009856 \text{ mm}} \approx -2{,}23$$

$$\Phi(z_{max} = 2{,}33) = 0{,}990097 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

$$\Phi(z_{min} = -2{,}23) = 1 - \Phi(-z_{min} = 2{,}23) = 1 - 0{,}987126 = 0{,}012874 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Innerhalb des Intervalls $[z_{min}; z_{max}]$ liegen folglich:

$$\Phi(z_{max}) - \Phi(z_{min}) = 0{,}990097 - 0{,}012874 \approx 0{,}977223 \approx 97{,}72\%$$

Insgesamt liegt nur bei ca. 97,72% der produzierten Prallelemente die charakteristische Breite d im geforderten Intervall. Die Forderung des Abnehmers wird von den gefertigten Prallelementen somit nicht erfüllt!

d) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich des Erwartungswertes μ_d mit dem Nennmaß von d_{nenn} = 15 mm

- Es sollen der anhand einer Messreihe abgeschätzte Erwartungswert mit einem vorgegebenen Referenzwert verglichen werden.

⇒ t-Test für Erwartungswert

- Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert der gefertigten Prallelemente vom Referenzwert abweicht oder mit diesem identisch ist! Das Vorzeichen einer etwaigen Abweichung ist hingegen nicht von Interesse.

⇒ zweiseitige Hypothese

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

⇒ $H_0: \mu_x = \mu_0$ ≙ es gibt keinen signifikanten Unterschied

gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_0$ ≙ der Erwartungswert weicht vom Referenzwert ab

Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

mit

$$n = 8$$

$$\bar{x} = \bar{d} \approx 14{,}9995 \text{ mm}$$

$$\mu_0 = 15 \text{ mm}$$

$$s_x = s_d \approx 0{,}009856 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{14{,}9995 \text{ mm} - 15 \text{ mm}}{\frac{0{,}009856 \text{ mm}}{\sqrt{8}}} \approx -0{,}143$$

Vergleichswert: $t_{n-1;1-\alpha/2}$ mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}1$

⇒ $t_{7;0,95} = 1{,}89$

Test: $|t_0| > t_{n-1;1-\alpha/2}$

hier: $|-0{,}143| > 1{,}89$ ↯

⇒ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

⇒ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ stimmt der Erwartungswert der charakteristischen Breite d der gefertigten Prallelemente mit dem Nennwert von $d_{nenn} = 15$ mm überein!

e) Test auf Normalverteilung

Als Nullhypothese wird beim χ_0^2-Test formuliert, dass die beobachtete Verteilung einer Normalverteilung genügt. Die Nullhypothese ist abzulehnen, wenn gilt:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

Die Testgröße χ_0^2 ist in der Aufgabenstellung vorgegeben. Gesucht wird also der kritische Wert $\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$. Dieser ist von den Parametern r^*, s und α abhängig.

- Die Zahl der auswertbaren Klassen beträgt $r^* = 11$.
- Die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion beträgt $s = 2$ (μ und σ).
- Das Signifikanzniveau beträgt $\alpha = 0{,}025$.

Es gilt hier also:

$$\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha} = \chi^2_{11-2-1;1-0{,}025} = \chi^2_{8;0{,}975}$$

$$\chi^2_{8;0{,}975} = 17{,}5 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Die auszuwertende Testbedingung lautet somit:

$$18{,}7 > 17{,}5 \quad \surd$$

Die Testbedingung ist erfüllt.

Die Nullhypothese wird daher auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}025$ abgelehnt.

Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}025$ kann nicht davon ausgegangen werden, dass die beobachtete Verteilung einer Normalverteilung genügt.

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung der Strouhal-Zahl S für $\alpha = 0{,}02$:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Hier gegeben:

$$\overline{v} = \frac{f \cdot d}{S}$$

Umstellen der Gleichung liefert:

$$f = S \cdot \frac{\overline{v}}{d}$$

Mit $S \equiv b$ gilt weiterhin:

$$\frac{\overline{v}}{d} \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad f \mathrel{\hat{=}} y$$

Ferner gilt laut Aufgabenstellung:

$$d = 10 \text{ mm} = 0{,}01 \text{ m}$$

x-y-Wertepaare bestimmen:

x / Hz	y / Hz
100	20,44
200	39,36
300	59,92
400	79,56
500	99,82
600	120,28
700	139,37
800	160,01
900	180,88

Mittelwerte:

$$\overline{x} = 500 \text{ Hz}$$

$$\overline{y} = 99{,}96 \text{ Hz}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b = 0{,}200555$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = 0{,}269455\,\text{Hz}^2$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 0{,}519091\,\text{Hz}$$

Vertrauensbereich u_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 9$$

$$\alpha = 0{,}02$$

$t_{7;0,99} = 3{,}0$ (siehe Tabelle)

$$s_x \approx 273{,}861279\,\text{Hz}$$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 0{,}001895$$

Ergebnis:

$$S \equiv b = 0{,}200555 \pm 0{,}001895 \quad ; \alpha = 0{,}02$$

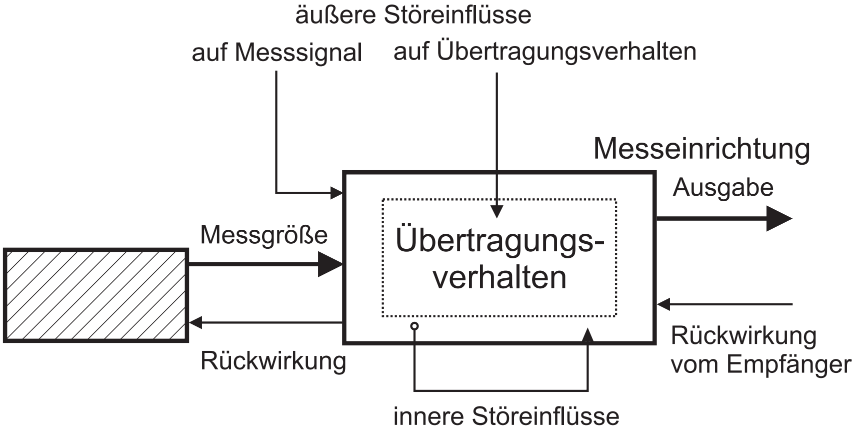
Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Erläutern Sie den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen! Nennen Sie jeweils eine intensive und eine extensive Grundgröße des SI-Systems!**

   Der Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen besteht darin, dass intensive Größen von der Größe des Systems unabhängig sind während der Wert extensiver Größen sich bei Teilung des Systems ebenfalls teilt.

   - intensive Grundgröße des SI-Systems: Temperatur (die einzige intensive Grundgröße)
   - extensive Grundgröße des SI-Systems: Länge (oder: Masse, Zeit, Stromstärke, Stoffmenge, Lichtstärke)

2. **Skizzieren Sie das allgemeine Blockschaltbild eines abweichungsbehafteten Messsystems und benennen Sie die verschiedenen Störeinflüsse!**



3. **Bei einer Kompensationswaage wird mit einem Elektromagneten eine Kraft auf die Waagschale ausgeübt, die entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft des Massenstückes ist. Die dazu erforderliche Stromstärke ist ein Maß für die Kraft. Man stellt fest, dass das Messergebnis vom herrschenden Luftdruck abhängt.**
   a) Was ist die Ursache?
   b) Um welche Art Störeinfluss handelt es sich?

   zu a) Der Auftrieb in Luft

   zu b) Superponierender äußerer Störeinfluss

4. **Eine Strecke von 800 mm werde 30-mal gemessen. Die Messwerte seien normalverteilt und es wird bei statistischer Sicherheit von 95,45% ein Vertrauensbereich von ±0,6 mm um den Mittelwert ermittelt. Wie viele Messungen müsste man durchführen, um diesen Vertrauensbereich auf ein Drittel zu reduzieren?**

   270 Messungen

5. **Bei der Messung einer Länge wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist und dass 95,45% aller Messwerte im Intervall [95 mm ; 179 mm] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die Wendestellen der Kurve werden bestimmt. Welchen Abstand haben diese?**

   42 mm

6. **Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –10 V und +10 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 50 kHz soll so digitalisiert werden, dass**

   i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
   ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 10 µV beträgt.

   Geben Sie an, welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um unter den genannten Anforderungen eine Minute des Signals darzustellen!

zu i) Die Abtastfrequenz muss mindestens $f_{Abtast} = 2*f_{max}$ = 100 kHz betragen.

zu ii) Die Spannungsauflösung muss mindestens 20 µV betragen, damit die maximale Quantisierungsabweichung 10 µV beträgt. Bei einem Spannungsbereich von 20 V sind dies 1.000.000 Stufen. Daher ist eine Digitalauflösung sind mindestens 20 Bit (2^{20} = 1.048.576) erforderlich.

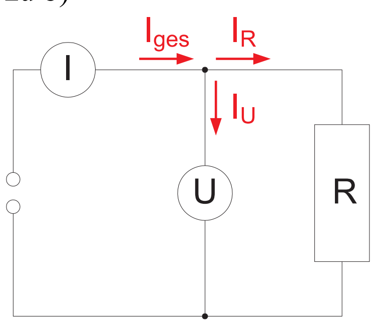
Um 1 Minute = 60 Sekunden mit einer Frequenz von 100 kHz und einer Digitalauflösung von 20 Bit = 2,5 Byte darstellen zu können, sind mindestens 60*2,5*100.000 = 15.000.000 Byte = 15 MB erforderlich.

7. **Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgerät (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.**

   a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
   b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

zu a) Für kleine Widerstände ist die Stromfehlerschaltung geeigneter.

zu b)



8. **An einer gedrehten Welle soll der Außendurchmesser ermittelt werden. Während des Fertigungsprozesses war die Welle in einem Dreibackenspannfutter eingespannt. Geben Sie an, ob im Interesse einer möglichst präzisen Messung eine 1-Punkt-Antastung, eine 2-Punkt-Antastung oder eine 3-Punkt-Antastung vorzuziehen ist!**

Es ist eine 2-Punkt-Antastung vorzuziehen.

9. **Welche beiden grundlegenden Typen von mechanischen Tastern unterscheidet man in der Koordinatenmesstechnik? Erläutern Sie deren Unterschied hinsichtlich der über den Antastvorgang gelieferten Information!**

Man unterscheidet schaltende und messende Taster. Ein schaltender Taster liefert nur die Information, dass das Messobjekt angetastet wurde, während ein messender Taster auch Informationen zur Antastkraft und Antastrichtung liefern kann.