Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $\eta = f(r_K, v_K, \rho_F, \rho_K)$ mit P = 95%:

Die gegebene Gleichung lautet:

$$\eta = \frac{2 \cdot r_K^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_F)}{9 \cdot v_K}$$

Die Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s² kann laut Aufgabenstellung als exakt angenommen werden.

Es verbleiben damit folgende abweichungsbehaftete Einflussgrößen: r_K, v_K, ρ_F, ρ_K

Den gegebenen Kugelradius r_K von P = 98% auf P = 95% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit sehr großen n ($n \to \infty$) folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{\infty;0,99} = 2{,}33$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{\infty;0,975} = 1{,}96$$

$$\Rightarrow \quad c_{r_K;95\%} = 0{,}005\ \text{mm} \cdot \frac{1{,}96}{2{,}33} \approx 0{,}004206\ \text{mm}$$

Das vollständige Messergebnis des Kugelradius r_K lautet damit:

$$r_K = 2{,}5\ \text{mm} \pm 0{,}004206\ \text{mm}\ ;\ \ P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$r_K = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \pm 4{,}206 \cdot 10^{-6}\ \text{m}\ ;\ \ P = 95\%$$

Die Konfidenzintervalle für die Dichten ρ_K, ρ_F können in der vorliegenden Form verwendet werden, allerdings bietet sich hier die Umrechnung in SI-Basiseinheiten an:

ρ_K = 8000 kg/m³ ± 20 kg/m³ bei P = 95%

ρ_F = 1260 kg/m³ ± 20 kg/m³ bei P = 95%

Berechnung des vollständigen Messergebnisses der Sinkgeschwindigkeit v_K aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\overline{v_K} \approx 62{,}0143 \frac{mm}{s}$

Streuung: $S_{v_K} \approx 0{,}5166 \frac{mm}{s}$

Vertrauensbereich: $c_{v_K} = \frac{S_{v_K}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 7$

$\alpha = 0{,}05$

folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{6;0,975} = 2{,}45$$

$$\Rightarrow \quad c_{v_K} = \frac{0{,}51662 \frac{mm}{s}}{\sqrt{7}} \cdot 2{,}45 \approx 0{,}4784 \frac{mm}{s}$$

$$v_K = 62{,}0143 \frac{mm}{s} \pm 0{,}4784 \frac{mm}{s}; \; P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$v_K = 6{,}20143 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s} \pm 4{,}784 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; \; P = 95\%$$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{f_0}$:

$$\overline{\eta} = \frac{2 \cdot \bar{r}_K^2 \cdot g \cdot (\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_F)}{9 \cdot \bar{v}_K}$$

$$= \frac{2 \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-3}\, m)^2 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot \left(8000 \frac{kg}{m^3} - 1260 \frac{kg}{m^3}\right)}{9 \cdot 6{,}20143 \cdot 10^{-2} \frac{m}{s}}$$

$$= 1{,}4808 \frac{kg}{m \cdot s} = 1{,}4808\, Pa \cdot s$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial r_K}\right|_{r_K, v_K, \rho_K, \rho_F} = \frac{4 \cdot \bar{r}_K \cdot g \cdot (\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_F)}{9 \cdot \bar{v}_K} \approx 1184{,}662 \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial v_K}\right|_{r_K, v_K, \rho_K, \rho_F} = -\frac{2\cdot\bar{r}_K^2\cdot g\cdot(\bar{\rho}_K - \bar{\rho}_F)}{9\cdot\bar{v}_K^2} \approx -23{,}8788\,\frac{kg}{m^2}$$

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial \rho_K}\right|_{r_K, v_K, \rho_K, \rho_F} = \frac{2\cdot\bar{r}_K^2\cdot g}{9\cdot\bar{v}_K} \approx 2{,}1971\cdot 10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$$

$$\left.\frac{\partial\eta}{\partial \rho_F}\right|_{r_K, v_K, \rho_K, \rho_F} = -\frac{2\cdot\bar{r}_K^2\cdot g}{9\cdot\bar{v}_K} \approx -2{,}1971\cdot 10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$$

Vertrauensbereich c_{f_0}:

$$c_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial r_K}\cdot c_{r_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial v_K}\cdot c_{v_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial \rho_K}\cdot c_{\rho_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial \rho_F}\cdot c_{\rho_F}\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_\eta = \sqrt{(1184{,}662\cdot 4{,}206\cdot 10^{-6})^2 + (-23{,}8788\cdot 4{,}784\cdot 10^{-4})^2 + (2{,}1971\cdot 10^{-4}\cdot 20)^2 + (-2{,}1971\cdot 10^{-4}\cdot 20)^2}\;\frac{kg}{m\cdot s}$$

$$c_\eta \approx 0{,}01393\,\frac{kg}{m\cdot s} = 0{,}01393\,Pa\cdot s$$

Vollständiges Messergebnis für die dynamische Viskosität η:

$$\eta = 1{,}4808\,Pa\cdot s \pm 0{,}01393\,Pa\cdot s;\quad P = 95\%$$

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich des Erwartungswertes μ mit dem Nennwert von 1000 ml
- Es sollen der anhand einer Messreihe abgeschätzte Erwartungswert mit einem vorgegebenen Referenzwert verglichen werden.

$\Rightarrow$ t-Test für Erwartungswert

- Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert der Füllmenge kleiner als die geforderte Nennfüllmenge ist oder aber gleich diesem (oder auch größer)!

$\Rightarrow$ einseitige Hypothese

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

$\Rightarrow$ $H_0: \mu_x = \mu_0$ $\hat{=}$ es gibt keinen signifikanten Unterschied

gegen $H_1: \mu_x < \mu_0$ $\hat{=}$ der Erwartungswert ist kleiner als der Nennwert

Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

Mittelwert und Streuung der Messreihe:

Mittelwert: $\bar{x} = 997{,}4 \text{ ml}$

Streuung: $s \approx 5{,}9479 \text{ ml}$

mit

$n = 10$

$\mu_0 = 1000 \text{ ml}$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \frac{997{,}4 \text{ ml} - 1000 \text{ ml}}{\frac{5{,}9479 \text{ ml}}{\sqrt{10}}} \approx -1{,}38$$

Vergleichswert: $t_{n-1;1-\alpha}$ mit: $n = 10$

$$\alpha = 0{,}05$$

$\Rightarrow$ $t_{9;0,95} = 1{,}83$

Test: $t_0 < t_{n-1;1-\alpha}$

hier: $-1{,}38 < -1{,}83$ ↯

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ stimmt der Erwartungswert der Füllmenge mit dem Nennwert von 1000 ml überein!

b) Wie viel Prozent der Packungen enthalten weniger als 1000 ml?

Es soll davon ausgegangen werden, dass Erwartungswert und Standardabweichung der Grundgesamtheit mit dem Mittelwert und der Streuung aus der Stichprobe überein stimmen. Es gilt also:

$$\mu = \overline{x} = 997{,}4 \text{ ml}$$

$$\sigma = S = 5{,}9479 \text{ ml}$$

Wie viel Prozent liegen bei einer Normalverteilung mit den obigen Parametern unterhalb von 1000 ml?

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$

hier: $z = \dfrac{1000 \text{ ml} - 997{,}4 \text{ ml}}{5{,}9479 \text{ ml}} \approx 0{,}44$

$$\Phi(z = 0{,}44) = 0{,}670031 \approx 67{,}003\% \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Insgesamt weisen ca. 67,003% der befüllten Packungen eine Füllmenge von weniger als 1000 ml auf!

c) Wie groß müsste der Erwartungswert bei gleicher Standardabweichung sein, damit mindestens 90% aller Packungen eine Füllmenge von 1000 ml oder mehr aufweisen?

Umstellen von $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ nach gesuchtem Erwartungswert μ liefert:

$$\mu = -z \cdot \sigma + x$$

Die Standardabweichung σ beträgt wie zuvor $\sigma = 5{,}9479\ \text{ml}$.

x ist die geforderte Füllmenge von 1000 ml.

Wenn 90% der Packungen eine Füllmenge von mindestens 1000 ml aufweisen sollen, so weisen 10% der Packungen eine Füllmenge kleiner als 1000 ml auf. Gesucht wird daher ein z so dass gilt:

$$\Phi(z) = 0{,}1$$

Mit Hilfe der Tabelle der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung und Ausnutzung der bekannten Symmetrie der Verteilung ergibt sich:

$$z = -1{,}282$$

Für den gesuchten Erwartungswert μ folgt damit:

$$\mu = -(-1{,}282) \cdot 5{,}9479\ \text{ml} + 1000\ \text{ml} \approx 1007{,}625\ \text{ml}$$

Damit bei unveränderter Standardabweichung mindestens 90% der befüllten Packungen eine Füllmenge von 1000 ml oder mehr aufweisen, müsste die Abfüllanlage mit einem Erwartungswert von μ = 1007,625 ml arbeiten.

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung des Abhängigkeit der relativen Permittivität ε_r eines Keramikwerkstoffs von der Temperatur T für $\alpha = 0{,}02$:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Hier gegeben:

$$\varepsilon_r(T) = \varepsilon_{rT_0} \cdot \left(1 + \beta \cdot (T - T_0)\right) \qquad (1)$$

und

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d} \qquad (2)$$

Einsetzen (2) in (1) und Umstellen der Gleichung liefert:

$$\frac{C \cdot d}{\varepsilon_{rT_0} \cdot \varepsilon_0 \cdot A} - 1 = \beta \cdot (T - T_0)$$

Mit $\beta \equiv b$ gilt weiterhin:

$$(T - T_0) \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad \frac{C \cdot d}{\varepsilon_{rT_0} \cdot \varepsilon_0 \cdot A} - 1 \mathrel{\hat{=}} y$$

x-y-Wertepaare bestimmen:

x / °C	y / 1
0	$-2{,}0624 \cdot 10^{-4}$
1	$-1{,}1884 \cdot 10^{-3}$
2	$-2{,}1705 \cdot 10^{-3}$
3	$-3{,}6436 \cdot 10^{-3}$
4	$-5{,}1168 \cdot 10^{-3}$
5	$-6{,}0989 \cdot 10^{-3}$
6	$-7{,}5721 \cdot 10^{-3}$
7	$-9{,}0453 \cdot 10^{-3}$
8	$-1{,}0027 \cdot 10^{-2}$
9	$-1{,}1501 \cdot 10^{-2}$
10	$-1{,}2483 \cdot 10^{-2}$

Mittelwerte:

$$\overline{x} = 5\,°C$$

$$\bar{y} = -6{,}2775 \cdot 10^{-3}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b \approx -1{,}26782 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{°C}$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 3{,}5075 \cdot 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 1{,}8728 \cdot 10^{-4}$$

Vertrauensbereich u_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 11$$

$$\alpha = 0{,}02$$

$t_{9;0,99} = 2{,}82$ (siehe Tabelle)

$$s_x \approx 3{,}3166\ °C$$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 4{,}801 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C}$$

Ergebnis:

$$\beta = b \approx -1{,}26782 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{°C} \pm 4{,}801 \cdot 10^{-5}\ \frac{1}{°C} \quad ; \alpha = 0{,}02$$

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems und ihre Einheiten!**

   Länge – Meter (m), Masse – Kilogramm (kg), Zeit – Sekunde (s), elektrische Stromstärke – Ampere (A), Temperatur – Kelvin (K), Stoffmenge – Mol (mol), Lichtstärke – Candela (cd)

2. **Erläutern Sie den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen!**

   Der Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen besteht darin, dass intensive Größen von der Größe des Systems unabhängig sind während der Wert extensiver Größen sich bei Teilung des Systems ebenfalls teilt.

3. **Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quartils (Q1) oder oberhalb des dritten Quartils (Q3) liegen!**

   50%

4. **Ein Korb enthalte N Bälle, von denen M Bälle schwarz und N – M Bälle weiß sind. Im Rahmen eines Zufallsexperiments werden aus diesem Korb wiederholt nacheinander n Bälle entnommen, untersucht und beiseite gelegt.**

   a) **Geben Sie an, ob sich die beobachtete Verteilung durch eine Binomialverteilung beschreiben lässt! Begründen Sie Ihre Antwort.**

   Nein! Da die Bälle nicht wieder in den Korb zurück gelegt werden, ändert sich im Laufe der Versuchsdurchführung die Wahrscheinlichkeit p und damit ist die Binomialverteilung hier nicht gültig.

5. **Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Im Auftrag der ESA sollen Sie analysieren, welche Grundprinzipien von Waagen für diesen Zweck einsetzbar sind. Ihre Großmutter schlägt vor, hierfür eine Balkenwaage und einen Satz kalibrierter Massestücke einzusetzen, wie sie dies noch aus ihrer Jugend vom Wochenmarkt kennt.**

   a) **Geben Sie an, ob eine derartige Wägeanordnung auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung erwarten lässt! Begründen Sie Ihre Antwort!**

   Eine Balkenwaage und ein Satz kalibrierter Massestücke sind auch für die Messung auf dem Mars geeignet, da es sich um ein Kompensationsmessverfahren handelt und sowohl das Wägegut als auch die Massestücke von der herrschenden Schwerkraft (die sich von der auf der Erde unterscheidet) betroffen sind.

6. **Von der Qualitätssicherung Ihres Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware der geforderten Spezifikation entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Für die Durchführung des Tests wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ vorgegeben.**

Aufgrund von Kundenbeschwerden möchten Sie die Zahl der trotz Verletzung der Spezifikation ausgelieferten Teile reduzieren.

a) Geben Sie an, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit α zu diesem Zweck erhöht oder verringert werden muss! Begründen Sie Ihre Antwort!

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α muss erhöht werden, da diese die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung 1. Art angibt, also den Fall, dass ein Bauteil das tatsächlich die Spezifikation erfüllt fälschlich als Ausschuss deklariert und nicht ausgeliefert wird. Bei dem von den Kunden bemängelten Fall, dass ein für gut befundenes und ausgeliefertes Teil in Wirklichkeit fehlerhaft ist, handelt es sich um eine Fehlentscheidung 2. Art, die mit der Wahrscheinlichkeit β auftritt. Wird nun die Irrtumswahrscheinlichkeit α erhöht, reduziert sich im Gegenzug die Wahrscheinlichkeit β.

7. Für eine Anwendung in der Prozessüberwachung sollen Sie einen A/D-Umsetzer auswählen. Von diesem wird eine möglichst hohe Abtastrate gefordert. Die benötigte Auflösung beträgt 6 Bit. Zur Auswahl stehen A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren, dem Wägeverfahren und dem Parallelverfahren.

a) Geben Sie an, welches dieser drei Grundprinzipen in Anbetracht der bestehenden Anforderungen am geeignetsten ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

Für die geforderte, möglichst schnelle Abtastung ist ein A/D-Umsetzer nach dem Parallelverfahren am geeignetsten, da dieser für die A/D-Umsetzung in jedem Fall nur einen Takt benötigt (im Unterschied zu den anderen Verfahren). Aufgrund der geringen Auflösung von 6 Bit benötigt der Parallelumsetzer nur 64 Komparatoren. Der Schaltungsaufwand hält sich daher in vertretbaren Grenzen.

8. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

Hinreichende Bedingung: Wenn das Abtasttheorem eingehalten wird, wird bereits alleine dadurch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals ermöglicht.

Nicht notwendige Bedingung: Auch wenn das Abtasttheorem nicht eingehalten wird, ist prinzipiell noch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals möglich, beispielsweise unter Einbeziehung von Zusatzinformationen.

9. Sie planen, ein Musiksignal zu digitalisieren und hierfür einen A/D-Umsetzer mit einer Abtastfrequenz von 44,1 kHz zu verwenden. Sie wissen, dass in dem analogen Musiksignal Frequenzanteile bis hinauf zu 50 kHz enthalten sind, deren Amplitude nicht vernachlässigbar ist. Ihnen ist bewusst, dass für diese hohen Frequenzanteile das Abtasttheorem nach Shannon verletzt wird. Ihr Kommilitone schlägt vor, die A/D-Umsetzung dennoch wie geplant vorzunehmen und argumentiert, dass Frequenzen von über 20 kHz für den Menschen ohnehin nicht hörbar seien und es daher keine Rolle spiele, wenn diese nicht korrekt digitalisiert werden.

a) Geben Sie an, ob Sie dieser Argumentation folgen würden oder nicht! Begründen Sie Ihre Antwort!

Diese Argumentation ist nicht sinnvoll, da es bei Verletzung des Abtasttheorems zu Aliasing-Fehlern kommt, die dazu führen, dass die hohen, unterabgetasteten Frequenzen in den hörbaren Teil des Frequenzspektrums gefaltet werden und somit als Störsignale hörbar in Erscheinung treten.

10. Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgerät (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.

a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!

b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

zu a) Für kleine Widerstände ist die Stromfehlerschaltung geeigneter.

zu b)