Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $\vartheta = f(R(\vartheta), R_0, a)$ mit P = 98%:

Die gegebene Gleichung kann direkt in der vorliegenden Form verwendet werden:

$$\vartheta = \frac{R(\vartheta) - R_0}{a \cdot R_0}$$

Abweichungsbehaftete Einflussgrößen: $R(\vartheta)$, R_0, a

Gegebenen Referenzwiderstand R_0 von P = 99% auf P = 98% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit n = 20 folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{19;0,99} = 2{,}54$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{19;0,995} = 2{,}86$$

$$\Rightarrow \quad c_{R_0;98\%} = 0{,}15\,\Omega \cdot \frac{2{,}54}{2{,}86} \approx 0{,}1332\,\Omega$$

$$R_0 = 100\,\Omega \pm 0{,}1332\,\Omega;\ P = 98\%$$

Der gegebene Temperaturkoeffizient a muss im vorliegenden Fall in der Einheit $(°C)^{-1}$ verwendet werden, da die von uns genutzte Gleichung wie in der Aufgabenstellung erläutert nur für den Fall gilt, dass die Temperatur in °C gemessen wird:

Gegeben: $$a = 3{,}88 \cdot 10^{-3}\,K^{-1} \pm 5 \cdot 10^{-5}\,K^{-1};\ P = 98\%$$

$$\Rightarrow \quad a = 3{,}88 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°C} \pm 5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{°C}$$

Berechnung des vollständigen Messergebnisses des Widerstands $R(\vartheta)$ aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $$\overline{R(\vartheta)} = 116{,}295\,\Omega$$

Streuung: $$S_{R(\vartheta)} \approx 0{,}18095\,\Omega$$

Vertrauensbereich: $c_{R(\vartheta)} = \frac{s_{R(\vartheta)}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 8$

$\alpha = 0{,}02$

folgt:

$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{7;0,99} = 3{,}00$

$$\Rightarrow \quad c_{R(\vartheta)} = \frac{0{,}18095\,\Omega}{\sqrt{8}} \cdot 3 \approx 0{,}19193\,\Omega$$

$R(\vartheta) = 116{,}295\,\Omega \pm 0{,}19193\,\Omega;\ \ P = 98\%$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{\vartheta}$:

$$\overline{\vartheta} = \frac{\overline{R(\vartheta)} - \overline{R_0}}{\overline{a} \cdot \overline{R_0}} = \frac{116{,}295\,\Omega - 100\,\Omega}{3{,}88 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°C} \cdot 100\,\Omega} \approx 41{,}997\ °C$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial R(\vartheta)}\right|_{\overline{R(\vartheta)},\overline{R_0},\overline{a}} = \frac{1}{\overline{a} \cdot \overline{R_0}} \approx 2{,}5773\,\frac{°C}{\Omega}$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial R_0}\right|_{\overline{R(\vartheta)},\overline{R_0},\overline{a}} = -\frac{\overline{R(\vartheta)}}{\overline{a} \cdot \overline{R_0}^2} \approx -2{,}9973\,\frac{°C}{\Omega}$$

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial a}\right|_{\overline{R(\vartheta)},\overline{R_0},\overline{a}} = -\frac{\overline{R(\vartheta)} - \overline{R_0}}{\overline{a}^2 \cdot \overline{R_0}} \approx -10824{,}08\,(°C)^2$$

Vertrauensbereich c_ϑ:

$$c_\vartheta = \sqrt{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial R(\vartheta)} \cdot c_{R(\vartheta)}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial R_0} \cdot c_{R_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial a} \cdot c_a\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_\vartheta = \sqrt{(2{,}5773 \cdot 0{,}19193)^2 + (-2{,}9973 \cdot 0{,}1332)^2 + (-10824{,}08 \cdot 5 \cdot 10^{-5})^2}\ °C$$

$c_\vartheta \approx 0{,}835\ °C$

Vollständiges Messergebnis für die Temperatur ϑ:

ϑ = 41,997 °C ± 0,835 °C ; P = 98%

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Konfidenzintervall:

Mittelwert: $\overline{R}_A \approx 100{,}0471\,\Omega$

Streuung: $s_{R_A} \approx 0{,}1037\,\Omega$

$$c_{R_A} = \frac{s_{R_A}}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 7$
$\alpha = 0{,}1$

$\Rightarrow$ $t_{6;0,95} = 1{,}94$

$$c_{R_A} = \frac{0{,}1037\,\Omega}{\sqrt{7}} \cdot 1{,}94 \approx 0{,}076\,\Omega$$

$$R_A = 100{,}047\,\Omega \pm 0{,}076\,\Omega;\;\; P = 90\%$$

b) Stichprobenumfang für $c_R \le 0{,}05\,\Omega$:

Das Konfidenzintervall bei bekanntem σ lautet:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Gesucht wird der minimale Stichprobenumfang n, für den gilt:

$$\frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \overset{!}{\le} 0{,}05\,\Omega$$

$$\Leftrightarrow \qquad n \overset{!}{\ge} \left(\frac{k \cdot \sigma}{0{,}05\,\Omega}\right)^2$$

gegeben: $\sigma_R = 0{,}1\,\Omega$

$$k(\alpha = 0{,}05) = t_{\infty;0,975} = 1{,}96$$

$\Rightarrow$ $n \ge 15{,}3664$

Um die Unsicherheit auf $c_R \le 0{,}05\,\Omega$ abschätzen zu können, ist ein Stichprobenumfang von mindestens n = 16 erforderlich!

c) Liegen mindestens 95% der Widerstände im geforderten Intervall?

Es erfüllen nur solche Widerstandsdrähte die Spezifikation, bei denen der elektrische Widerstand im Intervall $99{,}75\,\Omega \le R \le 100{,}25\,\Omega$ liegt.

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

Zunächst werden als Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung noch der Mittelwert und die Streuung der Stichprobe aus Anlage B benötigt:

Mittelwert: $\overline{R}_B \approx 99{,}9486\,\Omega$

Streuung: $s_{R_B} \approx 0{,}1104\,\Omega$

hier: $z_{max} = \dfrac{100{,}25\,\Omega - 99{,}9486\,\Omega}{0{,}1104\,\Omega} \approx 2{,}73$

$$z_{min} = \frac{99{,}75\,\Omega - 99{,}9486\,\Omega}{0{,}1104\,\Omega} \approx -1{,}80$$

$\Phi(z_{max} = 2{,}73) = 0{,}996833$ (aus Tabelle)

$\Phi(z_{min} = -1{,}80) = 1 - \Phi(-z_{min} = 1{,}80) = 1 - 0{,}964070 = 0{,}035930$ (aus Tabelle)

Innerhalb des Intervalls $[z_{min}; z_{max}]$ liegen folglich:

$$\Phi(z_{max}) - \Phi(z_{min}) = 0{,}996833 - 0{,}035930 \approx 0{,}960903 \approx 96{,}09\%$$

Insgesamt liegt bei ca. 96,09% der produzierten Widerstandsdrähte der elektrische Widerstand im geforderten Intervall. Die hausinterne Qualitätsvorgabe von mindestens 95% wird somit erfüllt!

d) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich der Erwartungswerte μ_{R_A} und μ_{R_B} anhand der Stichproben aus den beiden Produktionsanlagen A und B

- Es sollen zwei anhand experimentell ermittelter Daten abgeschätzte Erwartungswerte miteinander verglichen werden. Da die beiden Produktionsanlagen A und B unabhängig voneinander arbeiten, gibt es keinen Grund zu der Annahme, dass die beiden Stichproben verbunden sein könnten.

$\Rightarrow$ t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

- Es soll überprüft werden, ob die Erwartungswerte auf den beiden Anlagen A und B **identisch sind**! Die Alternative hierzu ist, dass sie **sich unterscheiden**. Ob einer der Werte größer oder kleiner als der andere ist, ist hingegen nicht von Interesse.

$\Rightarrow$ zweiseitige Hypothese

- Im Vorfeld des Tests der zweiseitigen Hypothese wird eine Zuordnung der Variablen x und y zu den Messgrößen R_A und R_B vorgenommen:

  $x \mathrel{\hat{=}} R_A$ (Produktionsanlage A)

  $y \mathrel{\hat{=}} R_B$ (Produktionsanlage B)

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

$\Rightarrow$ $H_0: \mu_x = \mu_y \;\hat{=}\;$ es gibt keinen signifikanten Unterschied

gegen $H_1: \mu_x \neq \mu_y \;\hat{=}\;$ die Erwartungswerte der Widerstände unterscheiden sich

Testgröße:

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}}$$

mit

$$n_x = n_y = n = 7$$

$$\overline{x} = \overline{R}_A \approx 100{,}0471\,\Omega$$

$$\overline{y} = \overline{R}_B \approx 99{,}9486\,\Omega$$

$$s_x = s_{R_A} \approx 0{,}1037\,\Omega$$

$$s_y = s_{R_B} \approx 0{,}1104\,\Omega$$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{7}\,\frac{100{,}0471\,\Omega - 99{,}9486\,\Omega}{\sqrt{(0{,}1037\,\Omega)^2 + (0{,}1104\,\Omega)^2}} \approx 1{,}72$$

Vergleichswert: $t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$ mit: $n = 7$

$\alpha = 0{,}05$

$\Rightarrow$ $t_{12;0,975} = 2{,}18$

Test: $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;1-\alpha/2}$

hier: $|1{,}72| > 2{,}18$ ↯

⇒ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

⇒ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ sind die Erwartungswerte der elektrischen Widerstände der auf den Produktionsanlagen A und B gefertigten Widerstandsdrähte identisch!

Aufgabe 3: Lineare Regression

a) Bestimmung des Temperaturkoeffizienten a für $\alpha = 0{,}05$:

Geradengleichung allgemein:

$$y = b \cdot x + a$$

Hier gegeben:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + a \cdot \vartheta)$$

Umstellen der Gleichung liefert:

$$\frac{R(\vartheta) - R_0}{R_0} = a \cdot \vartheta$$

Mit $a \equiv b$ gilt weiterhin:

$$\vartheta \mathrel{\hat{=}} x \quad ; \quad \frac{R(\vartheta) - R_0}{R_0} \mathrel{\hat{=}} y$$

x-y-Wertepaare bestimmen:

x / °C	y / 1
-20	-0,0843
-10	-0,0409
0	0,0010
10	0,0437
20	0,0832
30	0,1254
40	0,1667
50	0,2129
60	0,2486

Mittelwerte:

$$\overline{x} = 20\ °C$$

$$\overline{y} = 0{,}0840\overline{3}$$

Regressionskoeffizient b:

$$b \approx 4{,}1768\overline{3} \cdot 10^{-3}\ (°C)^{-1}$$

Restvarianz $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 \approx 3{,}5171 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\sigma} \approx 1{,}8754 \cdot 10^{-3}$$

Vertrauensbereich u_b:

$$c_b = \frac{\hat{\sigma} \cdot t_{n-2;1-\alpha/2}}{\sqrt{n} \cdot s_x} \qquad \text{mit:} \quad n = 9$$

$$\alpha = 0{,}05$$

$t_{7;0,975} = 2{,}36$ (siehe Tabelle)

$$s_x \approx 27{,}38613\ °C$$

$$\Rightarrow \quad c_b \approx 5{,}387 \cdot 10^{-5}\ (°C)^{-1}$$

Ergebnis:

$$a \equiv b \approx 4{,}177 \cdot 10^{-3}\ (°C)^{-1} \pm 5{,}387 \cdot 10^{-5}\ (°C)^{-1} \quad ; \alpha = 0{,}05$$

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!**

   Länge – Meter (m), Masse – Kilogramm (kg), Zeit – Sekunde (s), elektrische Stromstärke – Ampere (A), Temperatur – Kelvin (K), Stoffmenge – Mol (mol), Lichtstärke – Candela (cd)

2. **Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Abweichung es sich handelt!**

   Es handelt sich um eine Rückwirkungsabweichung. (Abweichung infolge einer Rückwirkung der Messeinrichtung auf das Messobjekt.)

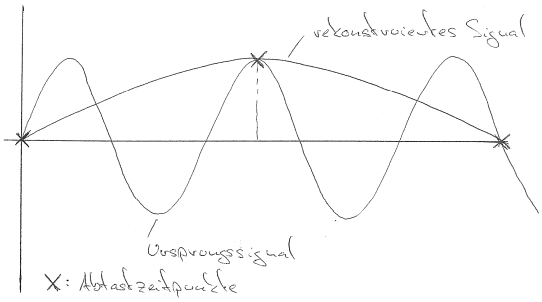
3. **Erläutern Sie die Begriffe „direkte Messmethode im engeren Sinne“ und „indirekte Messmethode“ und nennen Sie jeweils ein Beispiel.**

   Direkte Messmethode im engeren Sinne: Der gesuchte Messwert einer Messgröße wird durch den unmittelbaren Vergleich mit einem Normal der gleichen Messgröße ermittelt. Beispiele: Längenmessung mit einem Maßstab, Wägung durch einen Vergleich mit kalibrierten Gewichten

   Indirekte Messmethode: Der gesuchte Messwert einer Messgröße wird durch die Messung anderer Messgrößen ermitteln. Beispiele: Druckmessung aus Kraft- und Flächenmessung, Ermittlung der Dichte eines Körpers aus seiner Masse und seinem Volumen

4. **Formulieren Sie das Abtasttheorem nach Shannon! Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!**

   Wird ein bandbegrenztes Signal mit einer äquidistanten Folge von Stützstellen abgetastet, so ist die Rekonstruktion des Signals ohne Informationsverlust möglich, wenn die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der maximalen Signalfrequenz ist.



5. **Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –5 V und +5 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 20 kHz soll so digitalisiert werden, dass**

   i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
   ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 0,1 mV beträgt.

   Geben Sie an, welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um unter den genannten Anforderungen eine Minute des Signals darzustellen!

   zu i) Die Abtastfrequenz muss mindestens $f_{Abtast} = 2 \cdot f_{max}$ = 40 kHz betragen.

zu ii) Die Spannungsauflösung muss mindestens 0,2 mV betragen, damit die maximale Quantisierungsabweichung 0,1 mV beträgt. Bei einem Spannungsbereich von 10 V sind dies 50.000 Stufen. Daher ist eine Digitalauflösung sind mindestens 16 Bit ($2^{16} = 65536$) erforderlich.

Um 1 Minute = 60 Sekunden mit einer Frequenz von 40 kHz und einer Digitalauflösung von 16 Bit = 2 Byte darstellen zu können, sind mindestens 60*2*40.000 = 4.800.000 Byte erforderlich.

6. Erläutern Sie die drei Skalenniveaus „Nominalskala“, „Ordinalskala“ und „Intervallskala“ und grenzen Sie diese gegeneinander ab. Nennen Sie für jedes der drei Skalenniveaus ein Beispiel.

Nominalskalen setzen nur die Gleichheit oder Ungleichheit von Merkmalen voraus. Diese Merkmale lassen sich allerdings nicht in eine Rangfolge bringen. Die einzige Operation, die auf einer Nominalskala durchgeführt werden kann, ist die Prüfung auf Gleichheit bzw. Ungleichheit von Merkmalsausprägungen. Beispiele: Haarfarbe, Geschlecht

Ordinalskalen sind Skalen, in denen ausgesagt werden kann, welche Beziehung zwischen den Messwerten bestehen, d. h. ordinalskalierte Messwerte können bzgl. ihrer Größe in einer Rangreihe geordnet werden. Man nennt daher die Skalenwerte einer Ordinalskala auch Ränge. Diese Ränge können mit Begriffen oder Zahlen bezeichnet werden. Bei der Bezeichnung mit Zahlen müssen die Abstände zwischen den einzelnen Kategorien nicht unbedingt gleich sein. Beispiele: Ränge beim Militär: General > Oberst > Gefreiter; Energieeffizienzklassen: „A“ besser „B“ besser „C“; Platzierung in der Bundesliga-Tabelle (Platz 1 bis 18)

Intervallskalen sind metrische Skalen, in denen über den Unterschied zweier Messwerte ausgesagt werden kann, ob er größer, gleich oder kleiner als der Unterschied zweier anderer Messwerte ist. Das bedeutet, dass Skalenwerte einer Intervallskala bezüglich ihrer Differenzen (und Summen) verglichen werden können. Allerdings existiert kein natürlicher Nullpunkt für die Skala. Beispiele: Temperatur in °C; Jahreszahlen; Zeitpunkte

7. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Wie würden Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bei der beschriebenen Fehlentscheidung handelt es sich um eine Fehlentscheidung 1. Art (Ablehnung der Nullhypothese obwohl diese zutrifft). Die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung 1. Art wird gerade durch das Signifikanzniveau α angegeben. Um die Wahrscheinlichkeit dieser Fehlentscheidung zu reduzieren, muss also das Signifikanzniveau α verringert werden (kleinerer Zahlenwert).

8. Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

Bei Thermoelementen werden zwei unterschiedliche Metalldrähte A und B verbunden und die Verbindungsstelle mit dem Messobjekt in Kontakt gebracht (Temperatur T_2). Die offenen Enden werden an die Messleitungen (meist Kupfer) angeschlossen und liegen auf der Referenztemperatur T_0. Eine Temperaturdifferenz zwischen T_0 und T_2 bewirkt durch den Seebeck-Effekt eine elektrische Spannung.