Aufgabe 1: Abweichungsrechnung

a) Vollständiges Messergebnis für $m_W = f(B, D, U_m, R, g, w)$ mit P = 95%:

Die gegebene Gleichung lautet:

$$m_w = \frac{\pi \cdot w \cdot D \cdot B \cdot U_m}{g \cdot R}$$

Die Erdbeschleunigung g = 9,81 m/s² sowie die Windungszahl w = 200 können laut Aufgabenstellung als exakt angenommen werden.

Es verbleiben damit folgende abweichungsbehaftete Einflussgrößen: B, D, U_m, R

Die gegebene magnetische Flussdichte B von P = 99% auf P = 95% umrechnen:

allgemein: $$c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \cdot \frac{t_{n-1;1-\alpha_1/2}}{t_{n-1;1-\alpha_2/2}}$$

mit n = 20 folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha_1/2} = t_{19;0,995} = 2{,}86$$

$$t_{n-1;1-\alpha_2/2} = t_{19;0,975} = 2{,}09$$

$$\Rightarrow \quad c_{B;95\%} = 0{,}002\ \mathrm{T} \cdot \frac{2{,}09}{2{,}86} \approx 0{,}0014615\ \mathrm{T}$$

Das vollständige Messergebnis der magnetischen Flussdichte B lautet damit:

$$B = 0{,}4\ \mathrm{T} \pm 0{,}0014615\ \mathrm{T}\,;\ \ P = 95\%$$

Der Messwiderstand R hat laut Hersteller einen Nennwiderstand von R_{nenn} = 1 Ω, wobei für P = 95% das Konfidenzintervall ±0,1% vom Nennwert beträgt:

$R = 1\ \Omega \pm 0{,}1\% \cdot R_{nenn}$; P = 95%

$0{,}1\% \cdot R_{nenn} = 0{,}001 \cdot R_{nenn} = 0{,}001 \cdot 1\ \Omega = 0{,}001\ \Omega$

$\Rightarrow \quad R = 1\ \Omega \pm 0{,}001\ \Omega$; P = 95%

Berechnung des vollständigen Messergebnisses des Durchmessers D aus der gegebenen Messreihe:

Mittelwert: $\overline{D} \approx 70\ \mathrm{mm}$

Streuung: $S_D \approx 0{,}029814$ mm

Vertrauensbereich: $c_D = \frac{S_D}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$

mit: $n = 10$

$\alpha = 0{,}05$

folgt:

$$t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{9;0{,}975} = 2{,}26$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{0{,}029814\ \text{mm}}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}26 \approx 0{,}021307\ \text{mm}$$

$$D = 70\ \text{mm} \pm 0{,}021307\ \text{mm}\,;\ \ P = 95\%$$

oder in SI-Basiseinheiten

$$D = 7 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \pm 2{,}1307 \cdot 10^{-5}\ \text{m}\,;\ \ P = 95\%$$

Die Messspannung U_m kann in der gegebenen Form verwendet werden:

$U_m = 2{,}9\ \text{V} \pm 0{,}01\ \text{V}$; $P = 95\%$

Berechnung des Mittelwertes $\overline{m_W}$:

$$\begin{aligned}
\overline{m_w} &= \frac{\pi \cdot w \cdot \overline{D} \cdot \overline{B} \cdot \overline{U_m}}{g \cdot \overline{R}} \\
&= \frac{\pi \cdot 200 \cdot 7 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 0{,}4\ \text{T} \cdot 2{,}9\ \text{V}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\Omega} \\
&= 5{,}2008\ \text{kg}
\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen:

$$\left.\frac{\partial m_W}{\partial D}\right|_{\overline{D}, \overline{B}, \overline{U_m}, \overline{R}} = \frac{\pi \cdot w \cdot \overline{B} \cdot \overline{U_m}}{g \cdot \overline{R}} \approx 74{,}2966\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\left.\frac{\partial m_W}{\partial B}\right|_{\overline{D}, \overline{B}, \overline{U_m}, \overline{R}} = \frac{\pi \cdot w \cdot \overline{D} \cdot \overline{U_m}}{g \cdot \overline{R}} \approx 13{,}0019\ \text{s}^2 \cdot \text{A}$$

$$\left.\frac{\partial m_W}{\partial U_m}\right|_{\overline{D}, \overline{B}, \overline{U_m}, \overline{R}} = \frac{\pi \cdot w \cdot \overline{D} \cdot \overline{B}}{g \cdot \overline{R}} \approx 1{,}79337\ \frac{\text{A} \cdot \text{s}^3}{\text{m}^2}$$

$$\left.\frac{\partial m_W}{\partial R}\right|_{\overline{D},\,\overline{B},\,\overline{U_m},\,\overline{R}} = -\frac{\pi \cdot w \cdot \overline{D} \cdot \overline{B} \cdot \overline{U_m}}{g \cdot \overline{R}^2} \approx -5{,}2008\,\frac{A^2 \cdot s^3}{m^2}$$

Vertrauensbereich c_{m_W} :

$$c_{m_W} = \sqrt{\left(\frac{\partial m_W}{\partial D} \cdot c_D\right)^2 + \left(\frac{\partial m_W}{\partial B} \cdot c_B\right)^2 + \left(\frac{\partial m_W}{\partial U_m} \cdot c_{U_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial m_W}{\partial R} \cdot c_R\right)^2}$$

Einsetzen der oben berechneten Werte liefert:

$$c_{m_W} = \sqrt{\left(74{,}2966 \cdot 2{,}1307 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \left(13{,}0019 \cdot 0{,}0014615\right)^2 + \left(1{,}79337 \cdot 0{,}01\right)^2 + \left(-5{,}2008 \cdot 0{,}001\right)^2}\ \text{kg}$$

$$c_{m_W} \approx 0{,}026688\ \text{kg}$$

Vollständiges Messergebnis für die Masse m_W:

$$m_W = 5{,}2008\ \text{kg} \pm 0{,}026688\ \text{kg}\,; \quad P = 95\%$$

Aufgabe 2: t-Test, Normalverteilung

a) Konfidenzintervall bei unbekannter Standardabweichung:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Mittelwert: $\overline{x} = 899{,}7 \frac{N}{mm^2}$

Streuung: $S_x \approx 2{,}751 \frac{N}{mm^2}$

$$c_x = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{n-1;1-\alpha/2}$$

mit $n = 10$
$\alpha = 0{,}05$

$\Rightarrow \quad t_{9;0,975} = 2{,}26$

$$c_x = \frac{2{,}751 \frac{N}{mm^2}}{\sqrt{10}} \cdot 2{,}26 \approx 1{,}966 \frac{N}{mm^2}$$

$$R_{p0,2} = 899{,}7 \frac{N}{mm^2} \pm 1{,}966 \frac{N}{mm^2}; \;\; P = 95\%$$

b) Stichprobenumfang für Konfidenzintervall bei bekannter Standardabweichung:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$|u_x| = \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \overset{!}{\leq} 1 \frac{N}{mm^2}$$

$$\Rightarrow \quad n \overset{!}{\geq} \left(\frac{k \cdot \sigma}{1 \frac{N}{mm^2}}\right)^2 \qquad \text{mit} \qquad k(\alpha = 0{,}05) = t_{\infty;0,975} = 1{,}96 \quad \text{(aus Tabelle)}$$

$$\Rightarrow \qquad n \overset{!}{\geq} \left(\frac{1{,}96 \cdot 3 \frac{N}{mm^2}}{1 \frac{N}{mm^2}} \right)^2 = 34{,}5744$$

Für ein Konfidenzintervall von maximal $\pm 1 \frac{N}{mm^2}$ muss der Stichprobenumfang mindestens n = 35 betragen

c) Überprüfung mittels t-Test:

- Vergleich des Erwartungswertes μ mit dem Nennwert von $900 \frac{N}{mm^2}$
- Es sollen der anhand einer Messreihe abgeschätzte Erwartungswert mit einem vorgegebenen Referenzwert verglichen werden.

⇒ t-Test für Erwartungswert

- Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert der Dehngrenze mindestens den geforderten Wert aufweist, ob er also kleiner oder aber gleich diesem ist (oder auch größer)!

⇒ einseitige Hypothese

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

$$\Rightarrow \qquad H_0 : \mu_x = \mu_0 \quad \hat{=} \quad \text{es gibt keinen signifikanten Unterschied}$$

$$\text{gegen} \quad H_1 : \mu_x < \mu_0 \quad \hat{=} \quad \text{der Erwartungswert ist kleiner als der Nennwert}$$

Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

mit: $\mu_0 = 900 \frac{N}{mm^2}$

$\overline{x} = 899{,}7 \frac{N}{mm^2}$

$S_x = 2{,}751 \frac{N}{mm^2}$

n = 10

$$\Rightarrow \qquad t_0 = \frac{899{,}7\,\frac{N}{mm^2} - 900\,\frac{N}{mm^2}}{\frac{2{,}751\,\frac{N}{mm^2}}{\sqrt{10}}} \approx -0{,}345$$

Vergleichswert: $t_{n-1;1-\alpha}$ mit: $n = 10$

$\alpha = 0{,}01$

$\Rightarrow \qquad t_{9;0,99} = 2{,}82$

Test: $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$

hier: $-0{,}345 < -2{,}82$ ↯

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ stimmt der Erwartungswert der Dehngrenze mit dem Nennwert von $900\,\frac{N}{mm^2}$ überein! Es lässt sich also nicht zeigen, dass die Schrauben die Vorgabe nicht erfüllen!

d) Untersuchung mittels Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

Es soll davon ausgegangen werden, dass Erwartungswert und Standardabweichung der Grundgesamtheit mit dem Mittelwert und der Streuung aus der Stichprobe überein stimmen. Es gilt also:

$$\mu = \bar{x} = 899{,}7\,\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma = S_x = 2{,}751\,\frac{N}{mm^2}$$

Wie viel Prozent liegen bei einer Normalverteilung mit den obigen Parametern unterhalb von $900\,\frac{N}{mm^2}$?

Lösung mit Hilfe der Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung:

allgemein: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

hier: $$z = \frac{900\,\frac{N}{mm^2} - 899{,}7\,\frac{N}{mm^2}}{2{,}751\,\frac{N}{mm^2}} = 0{,}109 \approx 0{,}11$$

$$\Phi(z = 0{,}11) = 0{,}543795 \approx 54{,}38\% \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Insgesamt weisen ca. 54,38% der Schrauben eine Dehngrenze von weniger als $900\frac{N}{mm^2}$ auf!

e) Überprüfung mittels t-Test:

- Es sollen die anhand zweier Messreihe abgeschätzten Erwartungswerte miteinander verglichen werden.

⇒ t-Test für Vergleich zweier Erwartungswert

- Es soll überprüft werden, ob der Erwartungswert neueren Schrauben niedriger ist als jener der zuvor untersuchten Schrauben, ob er also kleiner oder aber gleich diesem ist (oder auch größer)!

⇒ einseitige Hypothese

- Mit der Vereinbarung:

  $x \mathrel{\hat{=}}$ aktuelle Stichprobe
  $y \mathrel{\hat{=}}$ frühere Stichprobe

- Die Nullhypothese H_0 sowie die Alternativhypothese H_1 lauten damit:

⇒ $H_0:\ \mu_x = \mu_y \quad \hat{=}$ es gibt keinen signifikanten Unterschied

gegen $H_1:\ \mu_x < \mu_y \quad \hat{=}$ der Erwartungswert ist kleiner als der Nennwert

Testgröße:

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad \text{(einfachere Form, wenn } n_x = n_y = n\text{)}$$

Mittelwert und Streuung für zweite Messreihe:

Mittelwert: $\bar{y} = 904{,}1\,\frac{N}{mm^2}$

Streuung: $S_y \approx 2{,}807\,\frac{N}{mm^2}$

$$\Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{10}\,\frac{899{,}7\,\frac{N}{mm^2} - 904{,}1\,\frac{N}{mm^2}}{\sqrt{\left(2{,}751\,\frac{N}{mm^2}\right)^2 + \left(2{,}807\,\frac{N}{mm^2}\right)^2}} \approx -3{,}54$$

Vergleichswert: $t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$ mit: $n = 10$

$\alpha = 0{,}01$

$\Rightarrow$ $t_{18;0,99} = 2{,}55$ (aus Tabelle)

Test: $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;1-\alpha}$

hier: $-3{,}54 < -2{,}55$ $\checkmark$

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 **wird** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ weisen die aktuellen Schrauben eine geringere Dehngrenze auf, als die früher gelieferten Schrauben!

Aufgabe 3: χ^2-Test

a) Überprüfung auf „fairen“ Würfel auf Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$:

Es soll überprüft werden, ob der Würfel das als „fair“ bezeichnete Verhalten aufweist, dass alle Augenzahlen mit derselben Wahrscheinlichkeit geworfen werden. Die Überprüfung erfolgt mittels eines χ^2-Tests.

Die für den Test benötigten theoretischen Häufigkeiten E_i ergeben sich durch die Überlegung, dass bei gleicher Auftretenswahrscheinlichkeit für alle sechs möglichen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Augenzahl bei 1/6 liegt. Mit dem Stichprobenumfang von n = 300 ergibt sich also:

$$E_i = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50 \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Die Testgröße χ_0^2 ergibt sich auf Grundlage der B_i und E_i gemäß folgender Tabelle:

Augenzahl	B_i	E_i	$\frac{(B_i - E_i)^2}{E_i}$
1	42	50	1,28
2	51	50	0,02
3	56	50	0,72
4	48	50	0,08
5	52	50	0,08
6	51	50	0,02
		Σ	2,2

$\Rightarrow \quad \chi_0^2 = 2{,}2$

Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:

Zahl der auswertbaren Klassen: $r^* = 6$

Zahl der Parameter der Verteilungsfunktion: $s = 0$ (es wurden keine Parameter aus der Stichprobe abgeschätzt)

$\Rightarrow \quad r^* - s - 1 = 6 - 0 - 1 = 5$

Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit:

gegeben: $\alpha = 0{,}05$

Vergleichswert ermitteln:

$$\chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha} = \chi^2_{5;0{,}95} = 11{,}1 \qquad \text{(aus Tabelle)}$$

Test: $\chi_0^2 > \chi_{5;0,95}^2$?

hier:

$2{,}2 > 11{,}1 \quad \lightning$

$\Rightarrow$ Die Hypothese H_0 wird **nicht** abgelehnt!

$\Rightarrow$ Auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ genügt die beobachtete Verteilung einer Gleichverteilung. Der Würfel kann somit als „fair“ bezeichnet werden!

Aufgabe 4: Kurzfragen

1. **Geben Sie an, bei welchen der folgenden Größen es sich nicht um Grundgrößen des SI-Systems handelt!**
   Gewichtskraft, elektrische Ladung, Lichtstrom, Dichte, molare Masse

   Gewichtskraft, elektrische Ladung, Lichtstrom, Dichte, molare Masse

2. **Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!**

   Bei einem linearen System 2. Ordnung ist die Anfangssteigung der Sprungantwort stets gleich Null, bei einem linearen System 1. Ordnung ist die Anfangssteigung der Sprungantwort stets größer Null.

3. **Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quintils (Q1) oder oberhalb des vierten Quintils (Q4) liegen!**

   40%

4. **Sie sitzen bei leichtem Regen auf der Terrasse eines Cafés und beobachten, wie Regentropfen in Ihre Tasse fallen. Je Minute sind es durchschnittlich 10 Tropfen.**
   a) **Geben Sie an, durch welche statistische Verteilung dieser Vorgang beschrieben wird!**
   b) **Geben Sie an, wie groß der Erwartungswert für die Anzahl der Tropfen innerhalb von 10 Minuten ist!**
   c) **Geben Sie an, wie groß die Standardabweichung für den Erwartungswert aus b) ist!**

   zu a): Poisson-Verteilung

   zu b): 100 Tropfen

   zu c): 10 Tropfen

5. **Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist und dass 99,73% aller Messwerte im Intervall [124 N; 136 N] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt.**
   a) **Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen?**

   4 N

6. **Von der Qualitätssicherung Ihres Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware der geforderten Spezifikation entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Für die Durchführung des Tests wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ vorgegeben. Aufgrund von Kundenbeschwerden möchten Sie die Zahl der trotz Verletzung der Spezifikation ausgelieferten Teile reduzieren.**

a) Geben Sie an, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit α zu diesem Zweck erhöht oder verringert werden muss! Begründen Sie Ihre Antwort!

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α muss erhöht werden, da diese die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung 1. Art angibt, also den Fall, dass ein Bauteil das tatsächlich die Spezifikation erfüllt fälschlich als Ausschuss deklariert und nicht ausgeliefert wird. Bei dem von den Kunden bemängelten Fall, dass ein für gut befundenes und ausgeliefertes Teil in Wirklichkeit fehlerhaft ist, handelt es sich um eine Fehlentscheidung 2. Art, die mit der Wahrscheinlichkeit β auftritt. Wird nun die Irrtumswahrscheinlichkeit α erhöht, reduziert sich im Gegenzug die Wahrscheinlichkeit β.

7. Erläutern Sie, welcher Fehlereinfluss bei der Messung Ohmscher Widerstände durch Verwendung einer Vierleiterschaltung vermieden werden kann!

Der Einfluss des elektrischen Widerstands der Zuleitungen.

8. Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –24 V und +24 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 80 kHz soll so digitalisiert werden, dass
i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 15 µV beträgt.
Geben Sie an,
a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um drei Minuten des Signals darzustellen!

zu a) Die Abtastfrequenz muss mindestens $f_{Abtast} = 2 \cdot f_{max}$ = 160 kHz betragen.

zu b) Die Spannungsauflösung muss mindestens 30 µV betragen, damit die maximale Quantisierungsabweichung 15 µV beträgt. Bei einem Spannungsbereich von 48 V sind dies 1.600.000 Stufen. Daher ist eine Digitalauflösung sind mindestens 21 Bit (2^{21} = 2.097.152) erforderlich.

zu c) Um 3 Minute = 180 Sekunden mit einer Frequenz von 160 kHz und einer Digitalauflösung von 21 Bit darstellen zu können, sind mindestens $180 \cdot 21/8 \cdot 160.000$ = 75.600.000 Byte erforderlich.

9. Zur Messung des Verfahrweges einer Maschinenachse wird ein inkrementales Messsystem mit Glasmaßstab eingesetzt. Der Abstand zwischen der Wirklinie der Bearbeitung und dem Maßstab beträgt 250mm.
a) Geben Sie an, mit welchem systematischen Fehler man rechnen muss!

Abbe-Fehler

10. Bei einer Kompensationswaage wird mit einem Elektromagneten eine Kraft auf die Waagschale ausgeübt, die entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft des Massenstückes ist. Die dazu erforderliche Stromstärke ist ein Maß für die Kraft. Man stellt fest, dass das Messergebnis vom herrschenden Luftdruck abhängt.
a) Geben Sie an, was die Ursache hierfür ist!
b) Geben Sie an, um welche Art Störeinfluss es sich handelt!

zu a) Der Auftrieb in Luft

zu b) Superponierender äußerer Störeinfluss