Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

26. August 2009

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ______________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: _________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 180 Minuten

2. Schriftliche Unterlagen sowie bereits programmierte Taschenrechner sind nicht zugelassen. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

4. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname und die Matrikelnummer. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

3. Der Studentenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 7 bis 10 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

dynamische Viskosität: 1 P (Poise) = 0,1 Pa·s = 0,1 N·s/m²

1. Aufgabe:

Zur Messung der dynamischen Viskosität η von Flüssigkeiten kann das im Aufbau sehr einfache Rotationsviskosimeter nach COUETTE eingesetzt werden. Die zu untersuchende Flüssigkeit befindet sich dabei im Spalt zweier koaxialer Zylinder, von denen sich der innere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht und so durch die innere Reibung der Flüssigkeit ein Moment M auf den äußeren Zylinder überträgt. Das Moment wird auf den Torsionsfaden F übertragen, dessen Verdrehung auf einer Skala zur Anzeige gebracht wird (vgl. Abb. 1).

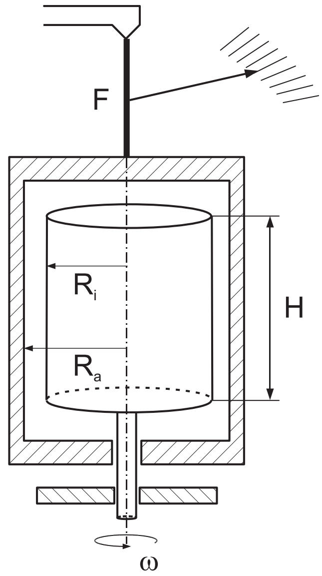


Abbildung 1.1: Rotationsviskosimeter nach COUETTE

Die dynamische Viskosität ergibt sich hierbei gemäß folgendem Zusammenhang:

$$\eta = \frac{M}{4\pi \cdot H \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

Hierin sind:

- M Drehmoment
- H Höhe des inneren Zylinders
- R_i Radius des inneren Zylinders
- R_a Radius des äußeren Zylinders
- ω Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders

Im Folgenden soll die dynamische Viskosität η auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen M, H, R_i, R_a und ω einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Radius R_a des äußeren Zylinders wird vom Hersteller mit $R_a = 70$ mm $\pm$ 0,3 mm bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% und sehr großem n angegeben.

Der Radius R_i des inneren Zylinders wird vom Hersteller mit $R_i = 60$ mm $\pm$ 0,2 mm bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% und sehr großem n angegeben.

Die Höhe H des inneren Zylinders beträgt H = 100 mm. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Die Winkelgeschwindigkeit ω wird mit $\omega = 4\pi\ s^{-1}$ gemessen. Die Unsicherheit der hierbei verwendeten Messeinrichtung wird vom Gerätehersteller mit 0,5% des Anzeigewertes bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% angegeben.

Das Moment M wurde mit Hilfe der integrierten Skala achtmal gemessen. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
M / Ncm	31,73	31,75	31,89	31,70	31,79	31,62	31,68	31,62

Tabelle 1.1: Messwerte des Moments M

a) Berechnen Sie die gesuchte dynamische Viskosität und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Ein Hersteller von Schmiermitteln produziert unter anderem synthetische Mehrbereichsöle, bei welchen durch die Zugabe von Polymeren die temperaturbedingte Änderung der Viskosität vermindert wird, so dass beispielsweise sowohl im Winter wie auch im Sommer dasselbe Motoröl eingesetzt werden kann.

Um zu gewährleisten, dass die dynamische Viskosität η des produzierten Öls im spezifizierten Bereich liegt, entnimmt der Hersteller aus der laufenden Produktion von 5 Liter Kanistern eine Stichprobe vom Umfang $n = 9$. An den entnommenen Proben wird mittels eines Rotationsviskosimeters nach COUETTE jeweils die dynamische Viskosität η experimentell ermittelt. Die Stichprobe führt zu den in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
η / mPa·s	95,21	99,01	95,87	96,32	95,98	97,46	90,68	95,94	97,23

Tabelle 2.1: Messwerte der dynamische Viskosität η aus entnommener Stichprobe

a) Geben Sie Mittelwert und Streuung der obigen Messreihe an!

b) Bestimmen Sie anhand obiger Messreihe das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der dynamischen Viskosität η auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

c) Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung der dynamischen Viskosität $\sigma_\eta = 2\ \text{mPa}\cdot\text{s}$ beträgt (gilt nur für Aufgabenteil c). Welchen Umfang n müsste dann eine Stichprobe aufweisen, um den Erwartungswert der dynamischen Viskosität auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ mit einer Unsicherheit von $c_\eta \leq 1\ \text{mPa}\cdot\text{s}$ abschätzen zu können?

d) Gemäß einer mit dem Abnehmer der Ölkanister getroffenen Vereinbarung muss bei mindestens 95% aller gelieferten Kanister die dynamische Viskosität η des Öls im Bereich $90\ \text{mPa}\cdot\text{s} \leq \eta \leq 100\ \text{mPa}\cdot\text{s}$ liegen. Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe, ob diese Anforderung von den produzierten Ölkanistern erfüllt wird!

Der Hersteller des Motoröls behauptet, dass der Einsatz seines SAE 10W-60 Hochleistungsöls verglichen mit einem Standardöl den CO_2-Ausstoß eines Motors reduziert. Um diese Behauptung zu untermauern, führt er mit insgesamt 8 Fahrzeugen unterschiedlichen Typs einen Fahrtest unter reproduzierbaren Bedingungen durch. Dabei werden die 8 Fahrzeuge zunächst mit dem Standardöl (Öl "A") betrieben und der mittlere CO_2-Ausstoß pro gefahrenem Kilometer bestimmt. Anschließend werden die Fahrzeuge mit dem Hochleistungsöl (Öl "B") befüllt und die Bestimmung des CO_2-Ausstoßes erneut durchgeführt. Dabei ergeben sich die in Tabelle 2.2 zusammengefassten Messwerte.

Fahrzeug	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Öl "A": CO_2 / g/km	125,8	187,2	108,7	246,7	143,8	137,5	167,4	152,8
Öl "B": CO_2 / g/km	123,4	186,7	108,9	240,3	144,2	133,8	163,9	154,9

Tabelle 2.2: Messwerte des mittleren CO_2-Ausstoßes pro Kilometer für die Öle "A" und "B"

e) Überprüfen Sie mittels eines statistischen Tests, ob die Behauptung des Herstellers – der mittlere CO_2-Ausstoß bei Verwendung des Hochleistungsöls (Öl "B") sei niedriger als bei Verwendung des Standardöls (Öl "A") – auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ widerlegt werden kann!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

In einem Labor zur Charakterisierung von Schmiermitteln ist ein Rotationsviskosimeter nach COUETTE vorhanden. Mit diesem kann die dynamische Viskosität η von Flüssigkeiten experimentell ermittelt werden. Wie bereits in Aufgabe 1 erläutert, ergibt sich die dynamische Viskosität η hierbei gemäß folgendem Zusammenhang:

$$\eta = \frac{M}{4\pi \cdot H \cdot \omega} \cdot \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

Leider sind in besagtem Labor die Unterlagen, aus denen die geometrischen Parameter H, R_i und R_a entnommen werden könnten nicht mehr auffindbar. Da eine Demontage der Messeinrichtung vermieden werden soll, schlägt der Laborleiter vor, die fehlenden Daten experimentell zu ermitteln. Hierzu substituiert er in obiger Gleichung die Geometrieparameter sowie die Konstanten durch einen Geräteparameter K, welcher wie folgt definiert ist:

$$K = \frac{1}{4\pi \cdot H} \cdot \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_a^2} \right)$$

Die Bestimmungsgleichung für die dynamische Viskosität η ergibt sich damit zu:

$$\eta = \frac{M}{\omega} \cdot K$$

Im Weiteren wird nun das Rotationsviskosimeter mit Glycerin befüllt, von welchem bekannt ist, dass es eine dynamische Viskosität von $\eta_{Glycerin} = 1{,}48$ Pa·s aufweist. (Anm.: Dieser Wert kann als exakt angesehen werden!) Nun wird eine Messreihe durchgeführt, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit ω jeweils solange erhöht wird, bis sich bestimmte Werte für das Moment M einstellen. Die bei diesem Versuch ermittelten Wertepaare sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

M / Ncm	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
ω / s^{-1}	1,51	2,95	4,39	5,93	7,58	9,05	10,88	12,11	13,83	14,96

Tabelle 3.1: Messwerte des Moments M und der Winkelgeschwindigkeit ω

a) Bestimmen Sie mittels linearer Regression den Geräteparameter K des verwendeten Rotationsviskosimeters einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

b) Geben Sie für ein Moment von M = 42 Ncm die zu erwartende Winkelgeschwindigkeit ω einschließlich des zugehörigen Vertrauensbereichs auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems, bei denen es sich um extensive Größen handelt!

2.) Welche beiden Arten von Fehlentscheidung können bei einem statistischen Test auftreten? Erläutern Sie diese!

3.) Erläutern Sie die Begriffspaare zeitkontinuierlich / zeitdiskret sowie amplitudenkontinuierlich / amplitudendiskret und skizzieren Sie die vier somit möglichen Signalarten!

4.) Sie sitzen bei leichtem Regen auf der Terrasse eines Cafés und beobachten, wie Regentropfen in Ihre Tasse fallen. Je Minute sind es durchschnittlich 8 Tropfen.

   a) Durch welche statistische Verteilung wird dieser Vorgang beschrieben?
   b) Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Tropfen in 18 Minuten?
   c) Wie groß ist die Standardabweichung für den Erwartungswert aus b)?

5.) Ist die Aussage „Die Messunsicherheit kann beliebig klein gemacht werden, wenn man ausreichend viele Wiederholungen der Messung durchführt“ richtig? Begründen Sie Ihre Aussage!

6.) Die Wechselwirkung zwischen Messeinrichtung und Messobjekt führt stets zu Messabweichungen. In der Vorlesung wurden drei Möglichkeiten diskutiert, mit diesen Abweichungen umzugehen. Nennen Sie diese!

7.) Erläutern sie die drei nachfolgend genannten Begriffe und nennen Sie zu jedem davon ein Beispiel:

   a) direkte Messverfahren im engeren Sinne
   b) direkte Messverfahren im erweiterten Sinne
   c) indirekte Messverfahren

8.) Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

9.) Aus welchen Elementen besteht ein vollständiges Messergebnis?

10.) Ein analoges Spannungssignal im Bereich von -10 V bis 10 V wird mittels eines 16 Bit A/D-Umsetzers digitalisiert. Wie groß ist der maximale Quantisierungsfehler?

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

   $$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

   $$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

   zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für *f* mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f, \; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i} - 1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 > t_{n-1; 1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

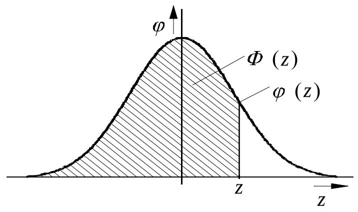
s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

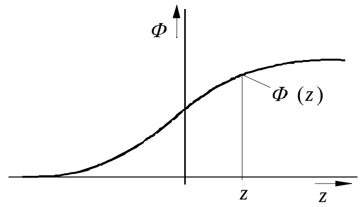
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt\;;\;\;\Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z