Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

24. August 2010

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ______________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: _________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Schriftliche Unterlagen sowie bereits programmierte Taschenrechner sind nicht zugelassen. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studentenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 8 bis 12 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

Frequenz: 1 Hz (Hertz) = 1/s

1. Aufgabe:

Ein modernes Verfahren zur Volumendurchflussmessung von gasförmigen und flüssigen Medien stellt das Wirbelstraßenprinzip dar. Es beruht auf der Existenz einer periodischen Oszillation des Strömungsfeldes hinter einem umströmten Prallelement. Wird ein starrer Körper von einem Fluid umströmt, so bilden sich an seiner Rückseite diskrete Wirbel. Diese lösen sich mehr oder weniger regelmäßig vom Prallelement ab und schwimmen mit der Strömung fort. Im Nachlauf des Prallelements entsteht ein Stromlinienbild, das als Wirbelstraße bezeichnet wird. Bei geeigneten Prallelementen ist die Frequenz der Wirbelablösung in einem relativ weiten Reynolds-Zahl-Bereich der Strömungsgeschwindigkeit proportional und kann somit als Messeffekt zur Volumendurchflussmessung herangezogen werden.

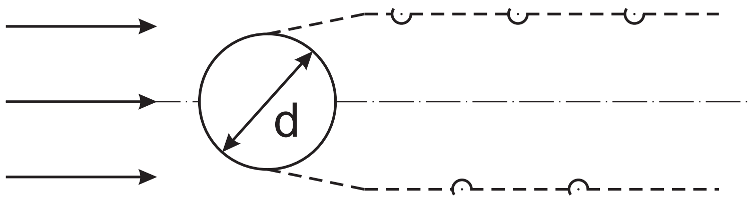


Abbildung 1.1: Wirbelbildung durch einen in der Strömung befindlichen Körper

Das Verhältnis der Wirbelablösefrequenz f zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ wird unter Zuhilfenahme der charakteristischen Breite d des Prallelements durch die Strouhal-Zahl S beschrieben. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\overline{v} = \frac{f \cdot d}{S}$$

Unter der Voraussetzung einer konstanten, von der Reynolds-Zahl unabhängigen Strouhal-Zahl kann hiermit der Volumendurchfluss q_v gemäß folgendem Zusammenhang berechnet werden.

$$q_v = \frac{1}{S} \cdot d \cdot A \cdot f$$

Der Parameter A bezeichnet hierin die Querschnittsfläche der Strömung senkrecht zur Strömungsrichtung.

Im Folgenden soll der Volumendurchfluss q_v auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen S, d, A, und f einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Die Strouhal-Zahl S ist bei geeigneter Geometrie des Prallelements näherungsweise unabhängig von der Reynolds-Zahl Re. Für den im vorliegenden Fall auftretenden Bereich von Re gibt der Hersteller des Prallelements die zugehörige dimensionslose Strouhal-Zahl mit $S = 0{,}2 \pm 0{,}0015$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ und einem Stichprobenumfang von $n = 50$ an.

Bei dem verwendeten Prallelement handelt es sich um ein Präzisionsdrehteil, dessen charakteristische Breite $d = 25{,}4$ mm beträgt und im vorliegenden Fall als exakt angesehen werden kann.

Die Querschnittsfläche A des durchströmten Rohres beträgt laut Herstellerangabe $A = 5\ dm^2 \pm 0{,}03\ dm^2$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ und einem Stichprobenumfang von $n = 20$.

Die Wirbelfrequenz f wurde mit Hilfe eines Ultraschallverfahrens neunmal gemessen. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
f / Hz	11,95	12,02	12,05	11,96	11,99	12,01	11,99	12,08	11,96

Tabelle 1.1: Messwerte der Wirbelfrequenz f

a) Berechnen Sie den gesuchten Volumendurchfluss q_v und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\%$ an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Ein Hersteller von Prallelementen für Volumendurchflussmesseinrichtungen nach dem Wirbelstraßenprinzip fertigt rotationssymmetrische Prallelemente aus Edelstahl. Von zentraler Bedeutung für die mit einer solchen Messeinrichtung erzielbare Messunsicherheit ist die präzise Einhaltung der charakteristischen Breite d des Prallelements quer zur Strömungsrichtung. Der Nennwert der charakteristischen Breite d der im vorliegenden Fall betrachteten Prallelemente beträgt d = 15 mm.

Im Rahmen einer routinemäßigen Qualitätskontrolle soll anhand einer Stichprobe sichergestellt werden, dass die charakteristische Breite d der gefertigten Prallelemente der Spezifikation entspricht. Aus der laufenden Produktion wird eine Stichprobe vom Umfang n = 8 entnommen. An den entnommenen Prallelementen wird unter Einsatz eines Koordinatenmessgeräts die charakteristische Breite d experimentell ermittelt. Die Stichprobe führt zu den in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
d / mm	14,989	15,017	14,988	14,997	15,003	14,995	14,998	15,009

Tabelle 2.1: Messwerte der charakteristischen Breite d aus entnommener Stichprobe

a) Bestimmen Sie anhand obiger Messreihe das Konfidenzintervall des Erwartungswertes der charakteristischen Breite d auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$!

b) Welchen Umfang n müsste bei einer Streuung wie unter a) eine Stichprobe aufweisen, um mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99 % für den Erwartungswert der charakteristischen Breite d einen Vertrauensbereich von weniger als ±5 µm zu erhalten?

c) Vom Abnehmer der Prallelemente wird gefordert, dass bei maximal 2% aller gefertigten Prallelemente die charakteristische Breite d um mehr als 0,15% des Nennwertes von diesem abweichen darf. Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe, ob diese Anforderung von den produzierten Prallelementen erfüllt wird!

d) Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe mittels eines statistischen Tests, ob der Erwartungswert der charakteristischen Breite d der gefertigten Prallelemente auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ dem Nennwert von 15 mm entspricht!

e) Um sicherzustellen, dass die charakteristische Breite d der gefertigten Prallelemente einer Normalverteilung genügt, wird eine Stichprobe vom Umfang n = 200 entnommen, um mittels eines χ^2-Tests auf das Vorliegen einer Normalverteilung prüfen zu können. Im Verlauf der Testdurchführung erhalten Sie eine Testgröße von $\chi_0^2 = 18{,}7$. Die Zahl der auswertbaren Klassen beträgt $r^* = 11$. Geben Sie an, ob auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}025$ vom Vorliegen einer Normalverteilung ausgegangen werden kann!

Hinweis: Für die Aufgabenteile a) bis d) kann für alle Messgrößen eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Wird ein starrer Körper von einem Fluid umströmt, so bilden sich an seiner Rückseite diskrete Wirbel. Diese lösen sich mehr oder weniger regelmäßig vom Prallelement ab und schwimmen mit der Strömung fort. Im Nachlauf des Prallelements entsteht ein Stromlinienbild, das als Wirbelstraße bezeichnet wird. Die Frequenz der Wirbelablösung ist in einem relativ weiten Reynolds-Zahl-Bereich der Strömungsgeschwindigkeit proportional und kann somit als Messeffekt zur Volumendurchflussmessung herangezogen werden.

Das Verhältnis der Wirbelablösefrequenz f zur mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ wird unter Zuhilfenahme der charakteristischen Breite d des Prallelements durch die dimensionslose Strouhal-Zahl S beschrieben. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$\overline{v} = \frac{f \cdot d}{S}$$

Im Rahmen eines physikalischen Praktikums möchten Sie die Strouhal-Zahl S experimentell bestimmen. Hierzu lassen Sie in einem geeigneten Rohrsystem ein Prallelement von einem Fluid umströmen. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ wird im Rahmen der Versuchsdurchführung auf verschiedene Werte eingestellt und jeweils die resultierende Wirbelablösefrequenz f gemessen. Die bei diesem Versuch ermittelten Wertepaare sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

$\overline{v}$ / m/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f / Hz	20,44	39,36	59,92	79,56	99,82	120,28	139,37	160,01	180,88

Tabelle 3.1: Messwerte der Strömungsgeschwindigkeit $\overline{v}$ und der Wirbelablösefrequenz f

Die charakteristische Breite d des Prallelements beträgt d = 10 mm. (*Anm.: Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.*)

a) Bestimmen Sie ausgehend von obiger Messreihe mittels linearer Regression die Strouhal-Zahl S einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Erläutern Sie den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen! Nennen Sie jeweils eine intensive und eine extensive Grundgröße des SI-Systems!

2.) Skizzieren Sie das allgemeine Blockschaltbild eines abweichungsbehafteten Messsystems und benennen Sie die verschiedenen Störeinflüsse!

3.) Bei einer Kompensationswaage wird mit einem Elektromagneten eine Kraft auf die Waagschale ausgeübt, die entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft des Massenstückes ist. Die dazu erforderliche Stromstärke ist ein Maß für die Kraft. Man stellt fest, dass das Messergebnis vom herrschenden Luftdruck abhängt.
   a) Was ist die Ursache?
   b) Um welche Art Störeinfluss handelt es sich?

4.) Eine Strecke von 800 mm werde 30-mal gemessen. Die Messwerte seien normalverteilt und es wird bei statistischer Sicherheit von 95,45% ein Vertrauensbereich von ±0,6 mm um den Mittelwert ermittelt. Wie viele Messungen müsste man durchführen, um diesen Vertrauensbereich auf ein Drittel zu reduzieren?

5.) Bei der Messung einer Länge wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist und dass 95,45% aller Messwerte im Intervall [95 mm ; 179 mm] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die Wendestellen der Kurve werden bestimmt. Welchen Abstand haben diese?

6.) Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –10 V und +10 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 50 kHz soll so digitalisiert werden, dass

   i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
   ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 10 µV beträgt.

   Geben Sie an, welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um unter den genannten Anforderungen eine Minute des Signals darzustellen!

7.) Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgerät (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.
   a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!
   b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

8.) An einer gedrehten Welle soll der Außendurchmesser ermittelt werden. Während des Fertigungsprozesses war die Welle in einem Dreibackenspannfutter eingespannt. Geben Sie an, ob im Interesse einer möglichst präzisen Messung eine 1-Punkt-Antastung, eine 2-Punkt-Antastung oder eine 3-Punkt-Antastung vorzuziehen ist!

9.) Welche beiden grundlegenden Typen von mechanischen Tastern unterscheidet man in der Koordinatenmesstechnik? Erläutern Sie deren Unterschied hinsichtlich der über den Antastvorgang gelieferten Information!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot s_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1,\ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1,\ldots,x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) - c_f, \ f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df = n - 1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d / \sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

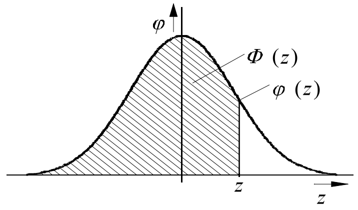
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

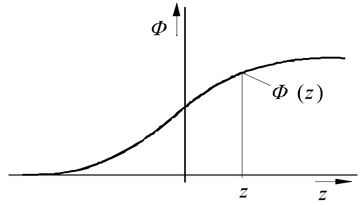
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350 \cdot 10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326 \cdot 10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167 \cdot 10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398 \cdot 10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867 \cdot 10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866 \cdot 10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280 \cdot 10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221 \cdot 10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129 \cdot 10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620 \cdot 10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z