1001

Bitte notieren Sie sich diese Nummer. Unter dieser Nummer finden Sie Ihre Note auf dem Notenaushang.

Name:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsraum:

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

24. Februar 2015

Klausur Einführung in die Messtechnik

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511141)

☐ sonstige: ______________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE						

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(\mathrm{uv})' = \mathrm{u}'\mathrm{v} + \mathrm{u}\mathrm{v}'$

Quotientenregel: $\left(\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right)' = \frac{\mathrm{v}\mathrm{u}' - \mathrm{u}\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}$

Kettenregel: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \mathrm{u}'(\mathrm{v})\mathrm{v}'(\mathrm{x}) \quad \text{mit} \quad \mathrm{y} = \mathrm{u}(\mathrm{v}(\mathrm{x}))$

Funktion	Ableitung
$\tan x \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

1. Aufgabe:

Während eines Aufenthaltes in Paris stellen sie sich die Frage, welchen Anteil die auf den Eiffelturm aufgesetzte Antennenanlage an der Gesamthöhe des Turms aufweist. Da Sie im Rahmen einer Internetrecherche lediglich eine Angabe über die Gesamthöhe einschließlich der Antennenanlage haben finden können, möchten Sie die Höhe der Antenne mittels Triangulation ermitteln.

Hierzu positionieren Sie sich, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, im Abstand d von der Basis des Eiffelturms, entsprechend dem Lotfußpunkt der Antennenbasis auf dem Untergrund, und peilen mit Hilfe eines aus einem Geodreieck improvisierten Theodoliten die Basis der Antennenanlage an und messen den Winkel dieser Peilung gegenüber der Horizontalen. Dabei gehen sie davon aus, dass sich Ihr Standort auf derselben Höhe befindet, wie die Basis des Turms. Mit der Ihnen bekannten Gesamthöhe h_{ges}, dem gemessenen Winkel α und dem Abstand d ergibt sich die gesuchte Höhe h_a der Antenne gemäß folgendem Zusammenhang:

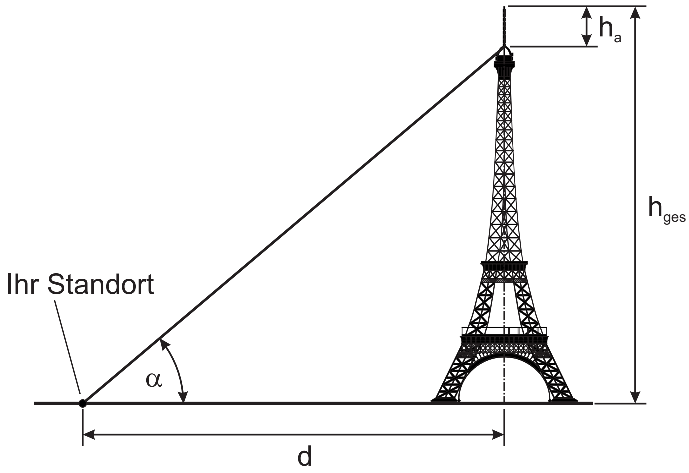


Abbildung 1.1: Triangulationsmessung am Eiffelturm

$$h_a = h_{ges} - d \cdot \tan\alpha$$

Im Folgenden möchten Sie die Antennenhöhe h_a auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen h_{ges}, d und α einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermitteln. Für die Gesamthöhe h_{ges} haben sie im Rahmen Ihrer Recherche eine Angabe der Betreibergesellschaft des Eiffelturms gefunden, welche die Gesamthöhe mit 324 m ± 0,3 m bei P = 98% angibt. Den Abstand d zwischen Ihrem Standort und der Turmbasis haben Sie im Vorfeld mittels eines GPS-Empfängers und auf Basis der vom Hersteller gegebenen technischen Daten in insgesamt n = 5 Messungen zu d = 411,7 m ± 1,2 m bei P = 95% bestimmt. Zur Bestimmung des Winkels α führen Sie mittels Ihres improvisierten Theodoliten insgesamt n = 10 Einzelmessungen durch. Die dabei ermittelten Einzelmesswerte sind Tabelle 1.1 zusammengefasst.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α / °	36,1	36,4	36,2	36,1	36,2	36,3	35,8	36,5	35,9	36,2

Tabelle 1.1: Messwerte des Winkels α

a) Berechnen Sie die gesuchten Antennenhöhe h_a und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Da Sie Ihren Vater im Verdacht haben, Sie beim Monopoly-Spiel zu betrügen, möchten Sie anhand empirisch erhobener Daten überprüfen, ob die Würfelergebnisse Ihres Vaters als rein zufällig angesehen werden können oder aber statistisch auffällig sind.

Beim Monopoly werden für jeden Spielzug zwei sechsseitige Würfel geworfen und die Summe der Augenzahlen beider Würfel gebildet. Mögliche Ergebnisse der Summe der Augenzahlen liegen folglich im Bereich 2 bis 12. Ihnen ist ferner bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einem einzelnen Würfel die Augenzahlen 1 bis 6 geworfen werden gleichverteilt ist, dass also bei einem einzelnen Würfel alle Augenzahlen 1 bis 6 mit derselben Wahrscheinlichkeit fallen.

Für Ihre statistische Untersuchung haben Sie über insgesamt 200 Spielzüge hinweg die Würfelergebnisse Ihres Vaters protokolliert und für die möglichen Ergebnisklassen 2 bis 12 die aufgetretenen Häufigkeiten ermittelt. Die dabei erhaltenen Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Häufigkeit	2	11	10	25	29	42	36	16	20	5	4

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten der Summe der mit zwei sechsseitigen Würfeln geworfenen Augenzahlen

a) Überprüfen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung der aus den Randbedingungen der Versuchsdurchführung zu erwartenden Verteilung genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Prallelementen für Volumendurchflussmesseinrichtungen wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Durchmesser der zylinderförmigen Prallelemente mit einem Nenndurchmesser von $D_{nenn} = 20$ mm überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ entnommen und der Durchmesser D der Prallelemente ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 19{,}97$ mm und eine Streuung von $S_D = 0{,}021$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Prallelementdurchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% beträgt für diesen Fall gerundet:

a) D = 19,97 mm ± 0,0191 mm; P = 99% ☐
b) D = 19,97 mm ± 0,0215 mm; P = 99% ☐
c) D = 19,97 mm ± 0,0223 mm; P = 99% ☐
d) D = 19,97 mm ± 0,0249 mm; P = 99% ☐
e) D = 19,97 mm ± 0,0260 mm; P = 99% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers auf maximal ± 0,01 mm abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 12 ☐
b) n = 14 ☐
c) n = 17 ☐
d) n = 20 ☐
e) n = 34 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Etwa wie viel Prozent aller Prallelemente weisen dann einen Durchmesser von $D \geq 20{,}03$ mm auf?

a) 0,21% ☐
b) 2,1% ☐
c) 7,64% ☐
d) 76,4% ☐
e) 99,79% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Sie möchten mittels einer Versuchsreihe in Erfahrung bringen, ob der Kraftstoffverbrauch von PKWs signifikant höher ist, wenn sie statt mit Super E5 mit Super E10 betankt werden. Hierfür nutzen Sie eine Flotte von n = 10 Fahrzeugen unterschiedlichen Typs und Alters, welche Sie zunächst mit Super E5 befüllt unter standardisierten Bedingungen eine Strecke von 1000 km zurücklegen lassen und dabei die insgesamt verbrauchte Kraftstoffmenge ermitteln. Anschließend lassen Sie dieselben Fahrzeuge dieselbe Strecke mit Super E10 befüllt zurücklegen und ermitteln wieder die hierbei verbrauchte Kraftstoffmenge. Anschließend möchten Sie mittels eines statistischen Tests untersuchen, ob der Verbrauch bei Befüllung mit Super E10 signifikant höher ist, als bei Befüllung mit Super E5.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) lineare Regression ☐
b) t-Test für Erwartungswert ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
d) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier abhängiger Stichproben möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte für verbundene Stichproben durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 25 aufweisen, haben Sie Mittelwert und Streuung der Differenz d ermittelt zu $\overline{d} = 0{,}18$ kg und $S_d = 0{,}34$ kg.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) 0,106 ☐
b) 2,647 ☐
c) 7,071 ☐
d) 9,444 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 24 ☐
b) 25 ☐
c) 48 ☐
d) 49 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Erwartungswert die Wirksamkeit eines Nahrungsergänzungsmittels A zum Muskelaufbau untersuchen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 30$. Ihre Nullhypothese lautet, dass das Nahrungsergänzungsmittel keinen Muskelaufbau bewirkt ($\mu_x = \mu_0 = 0$). Sie wählen eine einseitige Alternativhypothese ($\mu_x > \mu_0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 1{,}87$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

7. Die Änderung des elektrischen Widerstands ΔR eines mechanisch belasteten Dehnungsmessstreifens ist abhängig von der mechanischen Dehnung ε und dem Empfindlichkeitsfaktor k. Der Gesamtwiderstand R eines belasteten DMS setzt sich aus diesem dehnungsabhängigen Anteil ΔR und dem konstanten Grundwiderstand R_0 des unbelasteten DMS zusammen. Der Gesamtwiderstand R eines mechanisch belasteten DMS ergibt sich gemäß folgender Gleichung:

$$R = R_0 \cdot (1 + k \cdot \varepsilon)$$

Mittels linearer Regression möchten Sie den k-Faktor eines bestimmten Typs von Dehnungsmesstreifen experimentell bestimmen. Hierzu nehmen Sie eine Messreihe auf, bei welcher die Dehnungen ε als unabhängige Versuchsgröße vorgegeben werden und der elektrische Widerstand R jeweils als abhängige Größe bestimmt wird.

7.1. Geben Sie alle der folgenden Zuordnungen von x- und y-Größe an, welche eine im Sinne der Versuchsbeschreibung korrekte Berechnung des Regressionskoeffizienten ermöglichen!

a) $y = \frac{R}{R_0} - 1$ und $x = \varepsilon$ ☐

b) $y = \frac{R - R_0}{R_0}$ und $x = \varepsilon$ ☐

c) $y = R - R_0$ und $x = \varepsilon \cdot R_0$ ☐

d) $y = \frac{1}{\varepsilon}$ und $x = \frac{R_0}{R - R_0}$ ☐

e) $y = \frac{R - R_0}{\varepsilon \cdot R_0}$ und $x = 1$ ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:

8. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um extensive Größen handelt!

a) Temperatur ☐
b) spezifischer elektrischer Widerstand ☐
c) Brechungsindex ☐
d) Geschwindigkeit ☐
e) Impuls ☐
f) elektrische Ladung ☐
g) molare Masse ☐
h) Enthalpie ☐

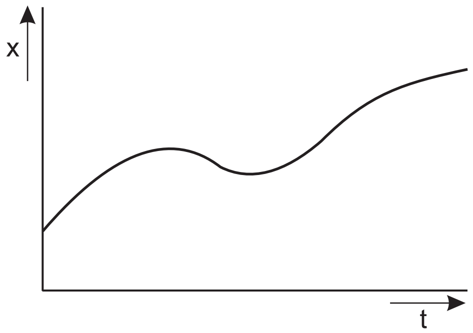
(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) $2 \cdot 10^{-3}$ kg + $4 \cdot 10^{4}$ mg = 42 g ☐
b) 1 pm = 10^{-12} km ☐
c) 10^{6} mm³ + 1 dm³ = $1{,}1 \cdot 10^{-3}$ m³ ☐
d) 200 µs + 100 ms = $1{,}002 \cdot 10^{-1}$ s ☐
e) 1 TW = 10^{3} MW ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

10. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor $K = 1$ werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 10 V auf 0 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer $t = T$ am Ausgang etwa anliegen?

a) 3,7 V ☐
b) 5 V ☐
c) 6,3 V ☐
d) 7,4 V ☐
e) 10 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 8 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $8 \leq \mu \leq 24$ bei $P = 98\%$ bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen durchgeführt werden müssten, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $12 \leq \mu \leq 20$ zu reduzieren!

a) 16 ☐
b) 32 ☐
c) 64 ☐
d) 128 ☐
e) 256 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Störeinfluss es sich handelt!

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
a) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
b) innerer Störeinfluss ☐
c) Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße ☐
d) Repräsentativitätsfehler ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Mittels einer hochgenauen Waage bestimmen Sie unter normalen Laborbedingungen den Wägewert von jeweils einem Kilogramm Blei und einem Kilogramm Federn. Welche Aussage hinsichtlich der beiden Wägewerte ist zutreffend?

b) Die Wägewerte für Blei und Federn unterscheiden sich nicht. ☐
c) Der Wägewert für das Blei ist höher, als der Wägewert für die Federn. ☐
d) Der Wägewert für die Federn ist höher, als der Wägewert für das Blei. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von –5 V bis 5 V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler 1 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 22 Bit ☐
b) 23 Bit ☐
c) 24 Bit ☐
d) 25 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über spezielle Verteilungsfunktionen zutreffend sind!

a) Die Gaußsche Normalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ und ihre Wendepunkte liegen bei $x = \mu \pm 2 \cdot \sigma$. ☐
b) Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt solche Prozesse gut, auf die eine kleine Zahl statistisch abhängiger Einflussgrößen mit gleicher Größenordnung einwirkt. ☐
c) Die Binomialverteilung beschreibt den wahrscheinlichen Ausgang einer Folge gleichartiger Versuche, bei der es nur zwei mögliche Ergebnisse gibt. ☐
d) Für eine sehr große Zahl von Versuchen ($n \to \infty$) und eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses ($p \to 0$) nähert sich die Binomialverteilung der Poissonverteilung an. ☐
e) Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung sind identisch. ☐

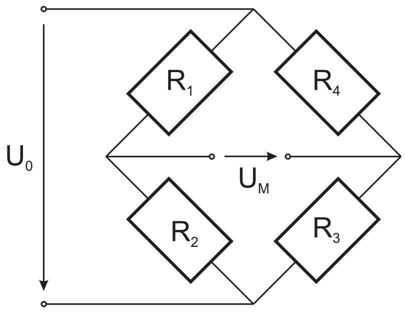
(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der Digitalisierung von Signalen zutreffend sind!

a) Digitalisierung ist die Umwandlung eines zeit- und wertdiskreten Analogsignals in ein zeit- und wertkontinuierliches Digitalsignal. ☐
b) Bei der Abtastung wird das Signal zu festen Zeitpunkten mit konstanten zeitlichen Abständen abgetastet, die Zustände zwischen den Abtastpunkten werden nicht berücksichtigt. ☐
c) Ist die Zeit zwischen zwei Abtastungen zu kurz, ist die Dichte der Abtastpunkte zu hoch und es tritt eine charakteristische Fehlmessung auf, der sogenannte „Aliasing-Fehler". ☐
d) Der zweite Schritt der Digitalisierung eines Signals ist die Quantisierung. Hierbei wird der kontinuierliche Wertebereich des Signals auf diskrete Werte abgebildet. ☐
e) Der bei der Quantisierung auftretende Rundungsfehler beträgt maximal das Doppelte der Auflösung, mit der quantisiert wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

18. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Wien-Robinson-Brücke. ☐

b) Die abgebildete Schaltung eignet sich zur Auswertung kleiner Widerstandsänderungen, z.B. bei der Verformungsmessung mit Dehnungsmessstreifen. ☐

c) Prinzipiell handelt es sich bei der abgebildeten Schaltung um die Parallelschaltung zweier Spannungsteiler, die mit einer Querverbindung verbunden sind. ☐

d) Eine Schaltung nach dem Prinzip der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, bezeichnet man auch als Viertelbrücke. ☐

e) In einer Schaltung wie der abgebildeten, bei welcher alle vier Widerstände veränderlich sind, heben sich vorzeichen- und betragsgleiche Änderungen angrenzender Widerstände auf. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

Kurzfragen:

19. Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!

20. Bei einer Prüfung haben die insgesamt 12 Teilnehmer die in nachfolgender Tabelle zusammen gefassten Noten erzielt:

Teilnehmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	2	1	4	2	3	1	3	4	4	2	5	4

Geben Sie den Medianwert und den Modalwert sowie die Spannweite obiger Notenverteilung an!

21. Geben Sie an, mit welcher Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit beschrieben werden kann, mit der bei n Würfen eines idealen sechsseitigen Würfels k-mal die Zahl 6 gewürfelt wird!

22. Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Wie würden Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

23. Ein als ideal angenommenes Dreiecksignal mit einer Periodendauer von 10 ms werde mit einer Abtastrate von 1 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

24. Für die indirekte Widerstandsmessung mittels Strom- und Spannungsmessgerät sind zwei unterschiedliche Schaltungsarten gebräuchlich. Benennen und skizzieren Sie diese! Geben Sie weiterhin an, welche davon für die Messung kleiner Widerstände geeigneter ist!

25. Bei der Messung ohmscher Widerstände kann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen durch Verwendung einer Vierleiterschaltung reduziert werden, bei welcher ein Spannungsmessgerät mittels zusätzlicher Messleitungen direkt am Widerstand angeschlossen wird. Erläutern Sie, weshalb hierdurch selbst dann der Einfluss des Widerstandes der Zuleitungen reduziert werden kann, wenn die zusätzlichen Messleitungen denselben Widerstand aufweisen, wie die eigentlichen Zuleitungen des Widerstandes!

26. Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Die Entscheidung fiel hierbei auf eine elektronische Waage mit einem elastischen Verformungskörper, dessen Deformation mittels Dehnungsmessstreifen erfasst wird. Die Kennlinie der Waage kann vom Anwender konfiguriert werden. Zusätzlich zu der Waage wird den Astronauten ein Satz auf der Erde kalibrierter Massestücke mitgegeben. Geben Sie an, ob unter Nutzung der beschriebenen Waage sowie der kalibrierten Massestücke auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung möglich ist und beschreiben Sie kurz das Vorgehen hierzu!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1,\ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit $P = 1 - \alpha$ beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1,\ldots,x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit $P = 1 - \alpha$:

$$\left[f(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n) - c_f \;,\; f(\overline{x}_1,\ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad (df = 2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

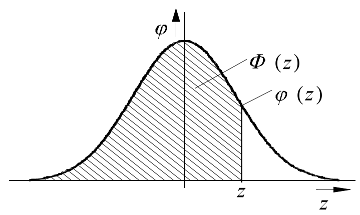
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

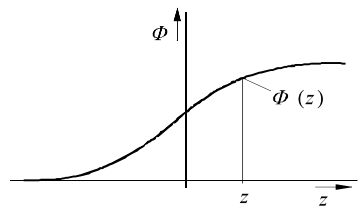
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
$\Phi(z)$	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	$\Phi(z)$

$\Phi(z)$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	$\Phi(z)$
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z