Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

16. Februar 2012

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: _____________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle zugelassen. Schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 8 bis 11 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

dynamische Viskosität: 1 P (Poise) = 0,1 Pa·s = 0,1 N·s/m^2 = 0,1 kg/(m·s)

elektrische Kapazität: 1 F (Farad) = 1 C/V = 1 A·s/V = 1 A^2 · s^4/(kg · m^2)

elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m

1. Aufgabe:

Die Viskosität ist die Eigenschaft eines flüssigen oder gasförmigen Stoffes, der gegenseitigen Verschiebung benachbarter Schichten einen Widerstand (innere Reibung) entgegenzusetzen. Sie bestimmt u.a. auch, welchen Strömungswiderstand bewegte Körper in einem Medium erfahren.

In der Technik sind heute zwei Definitionen der Viskosität geläufig: Man unterscheidet die dynamische und die kinematische Viskosität, die miteinander über die Dichte des betreffenden Stoffes zusammenhängen.

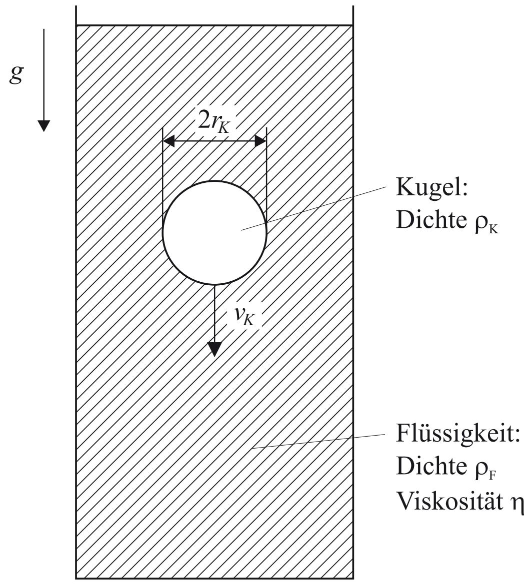


Abbildung 1.1: Fallkörperviskosimeter

Die dynamische Viskosität η kann beispielsweise mit einem Fallkörperviskosimeter (vgl. Abbildung 1.1) bestimmt werden. Hierbei lässt man eine Kugel (Dichte ρ_K) in einem mit der zu untersuchenden Flüssigkeit (Dichte ρ_F) gefüllten Gefäß frei fallen. Die Kugel wird im Schwerefeld der Erde (g = 9,81 m/s², als exakt anzusehen) beschleunigt, bis sich – bedingt durch die Flüssigkeitsreibung – eine stationäre Sinkgeschwindigkeit v_K einstellt.

Die dynamische Viskosität η lässt sich für die beschriebene Anordnung, unter Hinzuziehung des Stokes'schen Gesetzes, durch folgenden Zusammenhang angeben:

$$\eta = \frac{2 \cdot r_K^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_F)}{9 \cdot v_K}$$

Im Folgenden soll die dynamische Viskosität η auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen r_K, v_K, ρ_F und ρ_K einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Radius der verwendeten Prüfkugel wird vom Hersteller mit r_K = 2,5 mm ± 0,005 mm bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% und sehr großem n angegeben.

Die beiden Dichtewerte ρ_K und ρ_F wurden je zehnmal gemessen und es wurden folgende vollständige Messergebnisse ermittelt:

ρ_K = 8,00 g/cm³ ± 0,02g/cm³ bei P = 95%

ρ_F = 1,26 g/cm³ ± 0,02g/cm³ bei P = 95%

Zur Messung der stationären Sinkgeschwindigkeit kommt ein berührungslos wirkendes optisches Messverfahren zum Einsatz. Die Sinkgeschwindigkeit v_K wird in insgesamt n = 7 Wiederholungen gemessen. Dabei werden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7
v_K / mm/s	62,44	62,54	62,59	61,27	61,69	61,94	61,63

Tabelle 1.1: Messwerte der Sinkgeschwindigkeit v_K

a) Berechnen Sie die gesuchte dynamische Viskosität η und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% an.

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Ein Unternehmen aus der Farb- und Lackindustrie hat eine neue Abfüllmaschine angeschafft. Bevor die Anlage in Betrieb gehen kann, muss sie vom TÜV abgenommen werden und ein Prüfsiegel erhalten. Nach einer fachgerechten Einrichtung der Maschine wird hierzu eine Stichprobe vom Umfang n = 10 entnommen. Hierbei wurden die in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte erhalten.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Füllmenge / ml	989	999	993	1003	998	997	1002	1004	1002	987

Tabelle 2.1: Stichprobe der Füllmenge

a) Die Maschine erhält nur dann ein Prüfsiegel, wenn auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ die Füllmenge im Mittel 1000 ml oder mehr beträgt. Überprüfen Sie anhand obiger Messreihe mittels eines statistischen Tests ob die Anlage diese Bedingung erfüllt!

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass der Erwartungswert und die Standardabweichung der Maschine mit dem Mittelwert und der Streuung der Stichprobe übereinstimmen.

b) Wie viel Prozent der befüllten Packungen enthalten unter dieser Annahme weniger als die eigentlich geforderten 1000 ml?

c) Wie groß müsste bei der gegebenen Standardabweichung der Erwartungswert sein, damit mindestens 90 % aller befüllten Packungen die geforderten 1000 ml oder mehr enthalten?

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Die Permittivität ε (auch: dielektrische Leitfähigkeit) gibt die Durchlässigkeit eines Materials für elektrische Felder an. Die relative Permittivität (auch: Permittivitätszahl oder Dielektrizitätszahl) $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ eines Mediums stellt das Verhältnis seiner Permittivität zu der des Vakuums (elektrische Feldkonstante ε_0) dar.

Die relative Permittivität keramischer Werkstoffe weist eine deutliche Temperaturabhängigkeit auf. Für den Sonderfall einer linearen Abhängigkeit lässt sich die temperaturabhängige relative Permittivität $\varepsilon_r(T)$ durch folgenden Zusammenhang beschreiben:

$$\varepsilon_r(T) = \varepsilon_{rT_0} \cdot \left(1 + \beta \cdot (T - T_0)\right)$$

Hierin ist β der Temperaturkoeffizient, T die aktuelle Temperatur, T_0 die Bezugstemperatur und ε_{rT_0} die relative Permittivität bei der Bezugstemperatur T_0.

Um für einen bestimmten Werkstoff den Temperaturkoeffizienten β der relativen Permittivität zu ermitteln, wird in einem Klimaschrank ein Versuch durchgeführt, bei welchem in Schritten von 1°C der Temperaturbereich zwischen 20°C und 30°C durchfahren wird. Gemessen wird dabei jeweils die Kapazität eines Plattenkondensators, in welchem das zu untersuchende Keramikmaterial als Dielektrikum wirkt. Die Kapazität eines Plattenkondensators errechnet sich gemäß folgendem Zusammenhang:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Darin ist ε_0 die elektrischen Feldkonstante, ε_r die relative Permittivität des Dielektrikums, A die Fläche einer Kondensatorplatte und d der Abstand der Kondensatorplatten.

Folgende Daten des Plattenkondensators sind (exakt) bekannt:

$A = 100\ \text{mm}^2$

$d = 1\ \text{mm}$

Die Referenztemperatur beträgt $T_0 = 20°C$. Bei der Temperatur T_0 weist der untersuchte Keramikwerkstoff eine nominale relative Permittivität von $\varepsilon_{rT_0} = 2300$ auf.

Der Versuch führt zu den in Tabelle 3.1 zusammengefassten Einzelmesswerten.

T / °C	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
C / nF	2,036	2,034	2,032	2,029	2,026	2,024	2,021	2,018	2,016	2,013	2,011

Tabelle 3.1: Messwerte der Kapazität C in Abhängigkeit von der Temperatur T

a) Bestimmen Sie mittels linearer Regression den Temperaturkoeffizienten β der relativen Permittivität des untersuchten Keramikwerkstoffs einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}02$!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems und ihre Einheiten!

2.) Erläutern Sie den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen!

3.) Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quartils (Q1) oder oberhalb des dritten Quartils (Q3) liegen!

4.) Ein Korb enthalte N Bälle, von denen M Bälle schwarz und N – M Bälle weiß sind. Im Rahmen eines Zufallsexperiments werden aus diesem Korb wiederholt nacheinander n Bälle entnommen, untersucht und beiseite gelegt.

a) Geben Sie an, ob sich die beobachtete Verteilung durch eine Binomialverteilung beschreiben lässt! Begründen Sie Ihre Antwort.

5.) Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Im Auftrag der ESA sollen Sie analysieren, welche Grundprinzipien von Waagen für diesen Zweck einsetzbar sind. Ihre Großmutter schlägt vor, hierfür eine Balkenwaage und einen Satz kalibrierter Massestücke einzusetzen, wie sie dies noch aus ihrer Jugend vom Wochenmarkt kennt.

a) Geben Sie an, ob eine derartige Wägeanordnung auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung erwarten lässt! Begründen Sie Ihre Antwort!

6.) Von der Qualitätssicherung Ihres Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware der geforderten Spezifikation entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Für die Durchführung des Tests wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ vorgegeben. Aufgrund von Kundenbeschwerden möchten Sie die Zahl der trotz Verletzung der Spezifikation ausgelieferten Teile reduzieren.

a) Geben Sie an, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit α zu diesem Zweck erhöht oder verringert werden muss! Begründen Sie Ihre Antwort!

7.) Für eine Anwendung in der Prozessüberwachung sollen Sie einen A/D-Umsetzer auswählen. Von diesem wird eine möglichst hohe Abtastrate gefordert. Die benötigte Auflösung beträgt 6 Bit. Zur Auswahl stehen A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren, dem Wägeverfahren und dem Parallelverfahren.

a) Geben Sie an, welches dieser drei Grundprinzipen in Anbetracht der bestehenden Anforderungen am geeignetsten ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

8.) Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

Fortsetzung nächste Seite

9.) Sie planen, ein Musiksignal zu digitalisieren und hierfür einen A/D-Umsetzer mit einer Abtastfrequenz von 44,1 kHz zu verwenden. Sie wissen, dass in dem analogen Musiksignal Frequenzanteile bis hinauf zu 50 kHz enthalten sind, deren Amplitude nicht vernachlässigbar ist. Ihnen ist bewusst, dass für diese hohen Frequenzanteile das Abtasttheorem nach Shannon verletzt wird. Ihr Kommilitone schlägt vor, die A/D-Umsetzung dennoch wie geplant vorzunehmen und argumentiert, dass Frequenzen von über 20 kHz für den Menschen ohnehin nicht hörbar seien und es daher keine Rolle spiele, wenn diese nicht korrekt digitalisiert werden.

a) Geben Sie an, ob Sie dieser Argumentation folgen würden oder nicht! Begründen Sie Ihre Antwort!

10.) Ein ohmscher Widerstand mit einem Nennwert von 1 Ω soll unter Verwendung eines Strommessgeräts (Innenwiderstand 1 Ω) und eines Spannungsmessgerät (Innenwiderstand 1 MΩ) indirekt gemessen werden.

a) Geben Sie an, ob die geringere Messabweichung bei Einsatz einer Spannungsfehlerschaltung oder bei Einsatz einer Stromfehlerschaltung zu erwarten ist!

b) Skizzieren Sie die von Ihnen unter a) ausgewählte Schaltung!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j) \right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1,..., x_n
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x} \right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}} \right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1,...,x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) - c_f \, , \, f(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n) + c_f \right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\overline{x}_1,...,\overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad (\text{df} = 2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (\text{df} = n-1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;\,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

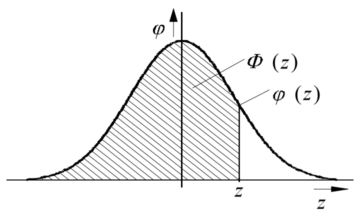
s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,65	1,96	2,33	2,58

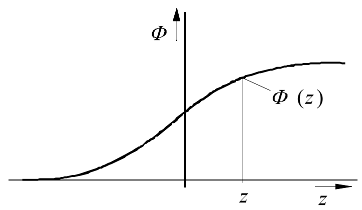
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z