iprom

INSTITUT FÜR PRODUKTIONSMESSTECHNIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

1001

Bitte notieren Sie sich diese Nummer. Unter dieser Nummer finden Sie Ihre Note auf dem Notenaushang.

Name:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsraum:

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

11. März 2014

Klausur Einführung in die Messtechnik

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511141)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE						

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad \text{für } 0 \le k \le n$

elektrische Spannung: 1 V (Volt) = 1 W/A = 1 $\text{kg}\cdot\text{m}^2/(\text{A}\cdot\text{s}^3)$

elektrische Ladung: 1 C (Coulomb) = 1 A·s

magnetische Flussdichte: 1 T (Tesla) = 1 Wb/m^2 = 1 $\text{V}\cdot\text{s/m}^2$ = 1 $\text{kg}/(\text{s}^2\cdot\text{A})$

1. Aufgabe:

Hall-Elemente basieren auf dem gleichnamigen physikalischen Effekt, der besagt, dass in einem stromdurchflossenen Leiter oder Halbleiter senkrecht zur Stromrichtung eine Spannung entsteht, wenn das Element senkrecht zu Strom und Spannung von einem Magnetfeld durchsetzt wird (vgl. Abbildung 1.1).

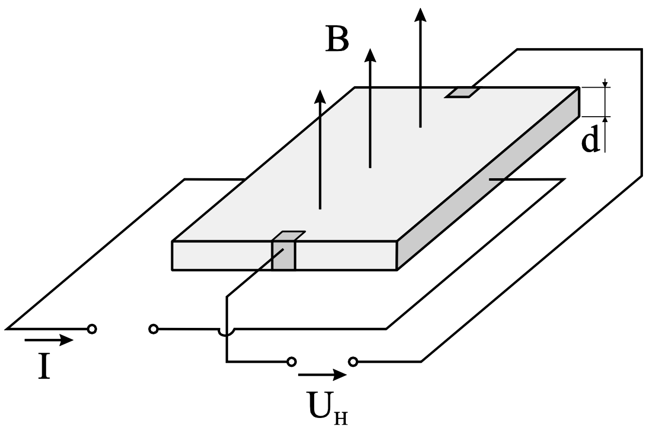


Abbildung 1.1: Hall-Element

Das Entstehen der Hall-Spannung erklärt sich aus der Ablenkung der Ladungsteilchen durch die Lorentz-Kraft. Sie ist bei konstantem Strom abhängig von der Amplitude und der Richtung des magnetischen Feldes.

Für das in Abbildung 1.1 skizzierte Element ist die Hall-Spannung U_H durch folgenden Zusammenhang definiert:

$$U_H = A_H \frac{I \cdot B}{d}$$

Hierin ist I der elektrische Strom, B die magnetische Flussdichte, d die Dicke des Plättchens und A_H die materialabhängige Hall-Konstante.

Im vorliegenden Fall soll ein Hall-Element genutzt werden, um die magnetische Flussdichte B messtechnisch zu bestimmen. Ziel ist daher, auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen U_H, I, A_H und d die magnetische Flussdichte B einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen zu ermitteln.

Der Strom I wird von einer Konstantstromquelle geliefert, welche so eingestellt ist, dass sie einen Nennstrom von I = 500 mA liefert. Der Hersteller gibt für diese Stromquelle eine Unsicherheit ΔI in Höhe von ± 2 % vom Nennwert bei P = 99% an.

Die Dicke d des Hall-Elements wurde im Vorfeld der Versuchsdurchführung experimentell ermittelt und beträgt d = 0,25 mm. Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.

Das Hall-Element besteht aus Indiumantimonid, für welches vom Hersteller eine Hall-Konstante von $A_H = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ m^3/C \pm 5{,}0 \cdot 10^{-6}\ m^3/C$ bei P = 95 % und sehr großem Stichprobenumfang n angegeben wird.

Die Hall-Spannung U_H wird bei der Versuchsdurchführung zehnmal gemessen. Es ergeben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_H / mV	81,5	79,4	80,3	80,9	78,8	79,8	80,1	79,6	80,4	80,2

Tabelle 1.1: Messwerte der Hall-Spannung U_H

a) Berechnen Sie die gesuchte magnetische Flussdichte B und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Aufgrund einiger auffälliger Alltagserfahrungen hegen Sie den Verdacht, über die Fähigkeit außersinnlicher Wahrnehmung zur verfügen. Diese Hypothese möchten Sie mittels eines Zufallsexperiments überprüfen. Hierzu befüllen Sie ein Gefäß mit insgesamt 100 Kugeln, wovon 15 Kugeln die Farbe Rot und 85 Kugeln die Farbe Schwarz aufweisen. Ihr persönliches Ziel ist es, mit Hilfe ihrer vermuteten Fähigkeiten vorrangig rote Kugeln aus dem Gefäß zu entnehmen.

Ein einzelnes Zufallsexperiment besteht daraus, dass Sie aus dem Gefäß mit verbundenen Augen nacheinander n = 4 Kugeln entnehmen, wobei sie jede gezogene Kugel sofort, also vor Entnahme der nächsten Kugel, wieder zurück legen. Als Ergebnis jedes einzelnen Durchlaufs halten Sie fest, wie viele der gezogenen Kugeln die Farbe Rot aufweisen. Sie führen insgesamt 100 Durchläufe dieses Versuchs durch, entnehmen also 100mal jeweils n = 4 Kugeln. Als Ergebnis der gesamten Versuchsreihe werten Sie nun aus, in wie vielen der 100 Durchläufen Sie jeweils 0, 1, 2, 3 oder 4 rote Kugeln gezogen haben. Die ermittelten Daten sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Anzahl rote Kugeln	0	1	2	3	4
Häufigkeit	39	44	13	3	1

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für k rote Kugeln

Ihnen ist bekannt, dass das statistische Verhalten Ihres Versuchs – sofern der Proband nicht über besondere Fähigkeiten verfügt – durch eine Binomialverteilung beschrieben wird, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel nur von dem Anteil roter Kugeln an der Gesamtmenge der Kugeln abhängt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei n Entnahmen k rote Kugeln gezogen werden beträgt demnach:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Hierin steht k für die Anzahl der gezogenen roten Kugeln, also die möglichen Ergebnisklassen 0 bis 4; n steht für die Anzahl der pro Durchlauf insgesamt entnommenen Kugeln; p steht für die Wahrscheinlichkeit, mit der bei einer einzelnen Entnahme eine rote Kugel gezogen wird, während q die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der eine schwarze Kugel gezogen wird (es gilt p + q = 1).

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob das bei Ihrem Versuch festgestellte Ergebnis auf einem Signifikanzniveau von α = 0,05 als zufällig angesehen werden kann, ob also die beobachtete Verteilung einer den Randbedingungen des Versuchs entsprechenden Binomialverteilung genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Drosselblenden für die Durchflussmessung wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Durchmesser der kreisförmigen Blendenöffnungen überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang n = 10 entnommen und der Durchmesser D der Drosselöffnungen ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 19{,}9864$ mm und eine Streuung von $S_D = 0{,}0164$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Drosselblendendurchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall gerundet:

a) D = 19,9864 mm ± 0,0094 mm; P = 95% ☐
b) D = 19,9864 mm ± 0,0095 mm; P = 95% ☐
c) D = 19,9864 mm ± 0,0102 mm; P = 95% ☐
d) D = 19,9864 mm ± 0,0116 mm; P = 95% ☐
e) D = 19,9864 mm ± 0,0117 mm; P = 95% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 90% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers auf maximal ± 0,007 mm abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 15 ☐
b) n = 16 ☐
c) n = 17 ☐
d) n = 24 ☐
e) n = 41 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Wie viel Prozent aller Drosselblenden weisen dann gerundet einen Durchmesser im Bereich 19,98 mm ≤ D ≤ 20,02 mm auf?

a) 34,82% ☐
b) 36,84% ☐
c) 63,16% ☐
d) 77,75% ☐
e) 97,98% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Sie möchten die Wirksamkeit zweier Nahrungsergänzungsmittel zum Muskelaufbau auf ihre Wirksamkeit hin überprüfen. Hierzu lassen Sie n = 20 Probanden trainingsbegleitend für die Dauer von vier Wochen Wirkstoff A einnehmen. Zwei Monate später lassen Sie dieselben n = 20 Probanden trainingsbegleitend wiederum für die Dauer von vier Wochen Wirkstoff B einnehmen. Aus Messungen jeweils zu Beginn und Ende der beiden vierwöchigen Untersuchungseinheiten bestimmen Sie jeweils den Gewinn an Muskelmasse in beiden Trainingszeiträumen. Sie möchten die Frage beantworten, ob sich die beiden Wirkstoffe in Ihrer Wirkung unterscheiden.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) lineare Regression ☐
b) t-Test für Erwartungswert ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
d) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier unabhängiger Stichproben möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 20 aufweisen, haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Größen x und y ermittelt zu $\overline{x} = 39{,}97$ kg, $S_x = 0{,}49$ kg, $\overline{y} = 40{,}06$ kg und $S_y = 0{,}47$ kg.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) –2,905 ☐
b) –0,838 ☐
c) –0,593 ☐
d) +0,593 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 18 ☐
b) 19 ☐
c) 20 ☐
d) 38 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für verbundene Stichproben die Wirksamkeit zweier Medikamente A und B zur Gewichtsreduktion vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 30$. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Wirkung der Medikamente sich nicht unterscheidet ($\mu_d = 0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_d \neq 0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}57$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6.2. Angenommen, die Nullhypothese würde <u>nicht</u> abgelehnt. Welche Aussage in Bezug auf die Wirksamkeit der untersuchten Medikamente A und B wäre dann am zutreffendsten?

Die Wirkung der Medikamente A und B

a) unterscheidet sich wahrscheinlich. ☐
b) unterscheidet sich definitiv. ☐
c) unterscheidet sich wahrscheinlich <u>nicht</u>. ☐
d) unterscheidet sich definitiv <u>nicht</u>. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

<u>Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:</u>

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um <u>extensive</u> Größen handelt!

a) Masse ☐
b) Wärmekapazität ☐
c) Dichte ☐
d) elektrische Ladung ☐
e) Brechungsindex ☐
f) Druck ☐
g) dynamische Viskosität ☐
h) Entropie ☐

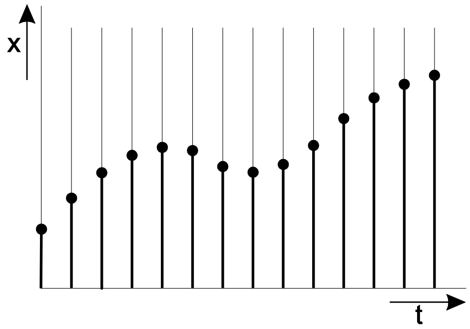
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) 10^{-6} kg + 1 µg = 1,001 mg ☐
b) 1 GW = 10^{3} MW ☐
c) 1 nm = 10^{-6} mm ☐
d) 100 hPa + 1 MPa = 1010 kPa ☐
e) 10 cm – 1 mm = $9{,}9 \cdot 10^{-1}$ m ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor K = 1 werde zum Zeitpunkt t = 0 mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 0 V auf 10 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer t = T am Ausgang etwa anliegen?

a) 5 V ☐
b) 6,3 V ☐
c) 7,5 V ☐
d) 9 V ☐
e) 9,9 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quartils (Q1) oder oberhalb des dritten Quartils (Q3) liegen!

a) 25% ☐
b) 40% ☐
c) 50% ☐
d) 60% ☐
e) 75% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem mit roten und grünen Kugeln gefüllten Gefäß zufällig n Kugeln nacheinander <u>ohne</u> Zurücklegen entnehmen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit beschreiben, mit der bei diesem Versuch eine bestimmte Anzahl roter Kugeln gezogen wird?

a) Binomialverteilung ☐
b) Normalverteilung ☐
c) Gleichverteilung ☐
d) Poissonverteilung ☐
e) Hypergeometrische Verteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

a) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass die getroffene Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% korrekt ist. ☐

b) Als Fehlentscheidung 2. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 <u>nicht</u> abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich <u>nicht</u> zutrifft. ☐

c) Die Güte eines statistischen Tests lässt sich durch Vergrößerung des zugrunde gelegten Stichprobenumfangs erhöhen. ☐

d) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen zu beweisen oder zu widerlegen. ☐

e) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf <u>nicht</u> für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

14. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Abweichungsquadrate zutreffend sind!

a) Die bei der linearen Regression berechnete Gerade geht immer durch den Schwerpunkt der Punkte $(\overline{x}, \overline{y})$. ☐

b) Bei der linearen Regression wird durch eine Menge von Wertepaaren (x, y) eine Gerade derart gelegt, dass die Summe der Abweichungen minimal wird. ☐

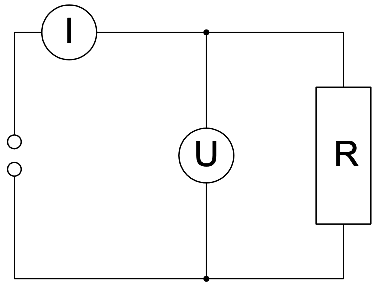
c) Eine Voraussetzung für die sinnvolle Anwendbarkeit der linearen Regression stellt dar, dass die Varianz der Residuen unabhängig vom x-Wert ist. ☐

d) Mit der linearen Regression kann nachgewiesen werden, dass eine beobachtete statistische Korrelation zweier Größen x und y auf einen kausalen Zusammenhang dieser beiden Größen zurückzuführen ist. ☐

e) Die lineare Regression liefert rechnerisch nur dann ein Ergebnis, wenn die Eingangsdaten tatsächlich näherungsweise einen linearen Zusammenhang aufweisen. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehler-schaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐

b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Coulombschen Gesetzes. ☐

c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐

d) Die systematische Messabweichung der Schaltung würde zu Null werden, wenn das verwendete Strommessgerät einen idealen Innenwiderstand von 0 Ohm aufweisen würde. ☐

e) Die systematische Messabweichung der Schaltung könnte dadurch reduziert werden, dass das Spannungsmessgerät mittels einer Vierleiterschaltung angeschlossen wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Bei dem Abtasttheorem nach Shannon handelt es sich hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um ein

a) hinreichendes und notwendiges Kriterium. ☐

b) hinreichendes aber <u>nicht</u> notwendiges Kriterium. ☐

c) <u>nicht</u> hinreichendes aber notwendiges Kriterium. ☐

d) <u>nicht</u> hinreichendes und <u>nicht</u> notwendiges Kriterium. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

17. Für eine Anwendung in der Prozessüberwachung sollen Sie einen A/D-Umsetzer auswählen. Von diesem wird eine möglichst hohe Abtastrate gefordert. Die benötigte Auflösung beträgt 6 Bit. Zur Auswahl stehen A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren, dem Wägeverfahren und dem Parallelverfahren. Geben Sie an, welches dieser drei Grundprinzipen in Anbetracht der bestehenden Anforderungen am geeignetsten ist!

a) Zählverfahren ☐

b) Wägeverfahren ☐

c) Parallelverfahren ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Kurzfragen:

18. Erläutern Sie die Begriffe *superponierender äußerer Störeinfluss* und *deformierender äußerer Störeinfluss* und grenzen Sie diese gegeneinander ab!

19. Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist, dass der Erwartungswert 140 N beträgt und dass 95,45% aller Messwerte im Intervall [131 N; 149 N] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt.

a) Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen!

20. Geben Sie an, welche Überprüfung mit der einfachen Varianzanalyse (einfaktorielle ANOVA) vorgenommen werden kann!

21. Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems nach Shannon zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!

22. Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen -12 V und +12 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 25 kHz soll so digitalisiert werden, dass
i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 30 µV beträgt.
Geben Sie an,

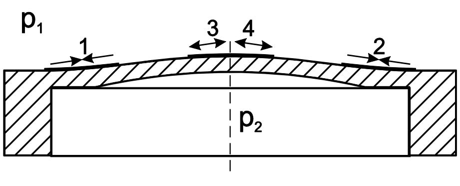
a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!
b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!
c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um fünf Minuten des Signals darzustellen!

23. Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Im Auftrag der ESA sollen Sie analysieren, welche Grundprinzipien von Waagen für diesen Zweck einsetzbar sind. Ihre Großmutter schlägt vor, hierfür eine Balkenwaage und einen Satz kalibrierter Massestücke einzusetzen, wie sie dies noch aus ihrer Jugend vom Wochenmarkt kennt.

a) Geben Sie an, ob eine derartige Wägeanordnung auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung erwarten lässt! Begründen Sie Ihre Antwort!

24. Skizzieren Sie eine Wheatstone-Brückenschaltung in Vollbrückenbeschaltung einschließlich Spannungsversorgung und Abgriff der Messspannung!

25. Nachstehend sehen Sie die schematische Darstellung eines Druckaufnehmers in DMS-Technik. Die Positionen 1 bis 4 kennzeichnen die Lage der einzelnen Dehnungsmessstreifen. Erläutern Sie, weshalb es im Hinblick auf die messtechnischer Erfassung der Widerstandsänderungen zweckmäßig ist, sowohl in Stauchungszonen (1 und 2) als auch in Dehnungszonen (3 und 4) Dehnungsmessstreifen zu applizieren!



Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für *f* mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f, \ f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;\,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

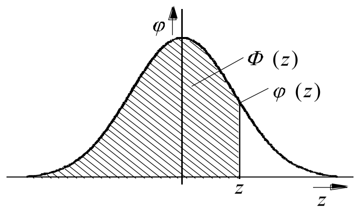
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

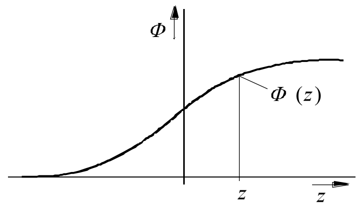
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z