Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

08. März 2010

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ______________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: _________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Schriftliche Unterlagen sowie bereits programmierte Taschenrechner sind nicht zugelassen. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studentenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 7 bis 10 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

elektrischer Widerstand: $1\ \Omega$ (Ohm) $= 1\ V/A = 1/S = 1\ W/A^2 = 1\ kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$

1. Aufgabe:

Der Widerstand R(T) eines metallischen Leiters mit den Temperaturkoeffizienten a und b hängt gemäß nachfolgender Gleichung von der Temperatur T ab, wobei R_0 den Widerstand bei der Referenztemperatur T_0 bezeichnet:

$$R(T) = R_0 \cdot \left[1 + a \cdot (T - T_0) + b \cdot (T - T_0)^2\right]$$

Wird die Temperatur in °C gemessen, wird als Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0\,°C$ gewählt, und wird nur der lineare Temperaturkoeffizient a berücksichtigt, so vereinfacht sich die vorstehende Gleichung zu:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + a \cdot \vartheta)$$

Durch Umstellen obiger Gleichung ergibt sich die gesuchte Temperatur ϑ in Abhängigkeit von dem Widerstand $R(\vartheta)$, dem Referenzwiderstand R_0 und dem Temperaturkoeffizienten a gemäß:

$$\vartheta = \frac{R(\vartheta) - R_0}{a \cdot R_0}$$

Im Folgenden soll die Temperatur ϑ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen $R(\vartheta)$, R_0 und a einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden.

Der Referenzwiderstand R_0 wird vom Hersteller mit $R_0 = 100\,\Omega \pm 0{,}15\,\Omega$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% und einem Stichprobenumfang von n = 20 angegeben.

Der Temperaturkoeffizient a wird vom Hersteller mit $a = 3{,}88 \cdot 10^{-3}\,K^{-1} \pm 5 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% und sehr großem n angegeben.

Der Widerstand $R(\vartheta)$ wurde achtmal gemessen. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$R(\vartheta)$ / Ω	116,28	116,56	116,04	116,38	116,35	116,46	116,07	116,22

Tabelle 1.1: Messwerte des Widerstands $R(\vartheta)$

a) Berechnen Sie die gesuchte Temperatur ϑ und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% an!

Hinweis: Der Temperaturkoeffizient a hat in der Kelvin- und in der Celsius-Temperaturskala denselben Zahlenwert. Der Temperaturkoeffizient kann daher mit der Einheit K^{-1} *oder* $(°C)^{-1}$ *angegeben werden.*

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Ein Hersteller von Temperaturaufnehmern fertigt unter anderem Metall-Widerstandsthermometer. Eine weit verbreitete Klasse dabei verwendeter Metall-Widerstände stellen die sogenannten Pt100-Sensoren dar. Bei diesen handelt es sich um Widerstandsdrähte aus Platin (Pt), welche so abgeglichen werden, dass ihr Referenzwiderstand $R_0 = 100\,\Omega$ bei einer Temperatur von $T_0 = 0$ °C beträgt.

Für die automatisierte Fertigung von Pt100-Sensoren verfügt der Hersteller über zwei baugleiche Produktionsanlagen A und B. Um zu gewährleisten, dass beide Anlagen Widerstandsdrähte mit korrektem Referenzwiderstand R_0 fertigen, werden regelmäßig aus beiden Produktionslinien Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen und ausgewertet. An den entnommenen Widerstandsdrähten wird jeweils der elektrische Widerstand R experimentell ermittelt. Die jüngste Stichprobe führte zu den in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerten für die auf den Produktionsanlagen A und B gefertigten Widerstandsdrähte.

	i	1	2	3	4	5	6	7
Produktionsanlage A	R / Ω	99,92	100,05	99,98	99,96	100,12	100,22	100,08
Produktionsanlage B	R / Ω	100,03	99,89	99,79	100,06	99,86	100,08	99,93

Tabelle 2.1: Messwerte des elektrischen Widerstands R aus entnommenen Stichproben

a) Bestimmen Sie anhand obiger Messreihe für die Produktionsanlage A das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des elektrischen Widerstands R auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$!

b) Angenommen, es sei bekannt, dass die Standardabweichung des elektrischen Widerstands auf beiden Produktionsanlagen $\sigma_R = 0{,}1\,\Omega$ beträgt (gilt nur für Aufgabenteil b). Welchen Umfang n müsste dann eine Stichprobe aufweisen, um den Erwartungswert des elektrischen Widerstands für die Produktionsanlage B auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ mit einer Unsicherheit von $c_R \leq 0{,}05\,\Omega$ abschätzen zu können?

c) Gemäß einer hausinternen Qualitätsvorgabe muss bei mindestens 95% aller gefertigten Widerstandsdrähte der elektrische Widerstand im Bereich $99{,}75\,\Omega \leq R \leq 100{,}25\,\Omega$ liegen. Überprüfen Sie ausgehend von obiger Stichprobe, ob diese Anforderung von den auf Produktionsanlage B produzierten Widerstandsdrähten erfüllt wird!

d) Zum Zwecke der Qualitätsüberwachung soll unter anderem überprüft werden, ob die beiden Produktionsanlagen A und B mit demselben Erwartungswert produzieren. Überprüfen Sie daher mittels eines statistischen Tests, ob die Erwartungswerte des elektrischen Widerstands R der auf Produktionsanlage A und B gefertigten Widerstandsdrähte auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als identisch angesehen werden können!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Der Widerstand R(T) eines metallischen Leiters ändert sich in Abhängigkeit von der Temperatur. Aufgrund ihres guten Signal-Rausch-Verhältnisses kommen Metall-Widerstände häufig in hochpräzisen Temperaturaufnehmern zum Einsatz. Unter der Annahme, dass die Temperatur in °C gemessen, als Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0\,°\mathrm{C}$ gewählt und nur der lineare Temperaturkoeffizient a berücksichtigt wird, ergibt sich der Widerstand $R(\vartheta)$ in Abhängigkeit vom Referenzwiderstand R_0, der Temperatur ϑ und dem Temperaturkoeffizienten a gemäß folgender Gleichung:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + a \cdot \vartheta)$$

In der Forschungsabteilung eines Herstellers von Temperaturaufnehmern wird nach neuen Materialien für die Herstellung von Metall-Widerstandsdrähten gesucht, welche eine besonders gute Linearität aufweisen. Für ein neu entwickeltes Material soll nun experimentell der Temperaturkoeffizient a ermittelt werden. Hierzu wird ein aus dem zu charakterisierenden Material gefertigter Metall-Widerstandsdraht mit einem Referenzwiderstand von $R_0 = 100\,\Omega$ *(Anm.: Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.)* in einem geregelten Temperaturschrank verschiedenen Temperaturen ϑ ausgesetzt und jeweils der sich einstellende elektrische Widerstand $R(\vartheta)$ gemessen. Die bei diesem Versuch ermittelten Wertepaare sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

ϑ / °C	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60
$R(\vartheta)$ / Ω	91,57	95,91	100,10	104,37	108,32	112,54	116,67	121,29	124,86

Tabelle 3.1: Messwerte der Temperatur ϑ und des elektrischen Widerstands $R(\vartheta)$

a) Bestimmen Sie mittels linearer Regression den Temperaturkoeffizienten a des untersuchten Widerstandsdrahtes einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$!

Hinweis: Der Temperaturkoeffizient a *hat in der Kelvin- und in der Celsius-Temperaturskala denselben Zahlenwert. Der Temperaturkoeffizient kann daher mit der Einheit* K^{-1} *oder* $(°\mathrm{C})^{-1}$ *angegeben werden.*

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

4. Aufgabe:

1.) Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems sowie ihre Einheiten!

2.) Bei der taktilen Antastung eines Messobjekts mittels eines Koordinatenmessgeräts tritt infolge der Antastkraft eine elastische Verformung des Messobjekts auf. Geben Sie an, um welche Art von Abweichung es sich handelt!

3.) Erläutern Sie die Begriffe „direkte Messmethode im engeren Sinne“ und „indirekte Messmethode“ und nennen Sie jeweils ein Beispiel.

4.) Formulieren Sie das Abtasttheorem nach Shannon! Skizzieren Sie anhand eines Sinussignals exemplarisch, wie es durch Verletzung des Abtasttheorems zu einer fehlerhaften Rekonstruktion des Ursprungssignals kommen kann!

5.) Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –5 V und +5 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 20 kHz soll so digitalisiert werden, dass

i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und
ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 0,1 mV beträgt.

Geben Sie an, welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um unter den genannten Anforderungen eine Minute des Signals darzustellen!

6.) Erläutern Sie die drei Skalenniveaus „Nominalskala“, „Ordinalskala“ und „Intervallskala“ und grenzen Sie diese gegeneinander ab. Nennen Sie für jedes der drei Skalenniveaus ein Beispiel.

7.) Bei der Durchführung eines statistischen Tests stellen Sie fest, dass wiederholt der Fall eintritt, dass die Nullhypothese infolge des Testresultats abgelehnt wird, obwohl weiterführende Untersuchungen zeigen, dass die Nullhypothese tatsächlich zutrifft. Wie würden Sie das Signifikanzniveau α des Tests verändern, um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer derartigen Fehlentscheidung zu reduzieren? Begründen Sie Ihre Antwort!

8.) Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $s = +\sqrt{s^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{x} + \frac{k\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2}\cdot s_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung s_x aus den Messwerten $x_1,\ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma}t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}s_x},\quad b + \frac{\hat{\sigma}t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}s_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma}t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}},\quad y^* + \frac{\hat{\sigma}t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{s_x^2}}\right]$$

Fehlerfortpflanzung für statistische Fehler

f sei $f(x_1,\ldots,x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) - c_f,\ f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) + c_f\right]$$

mit

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n} c_{x_i}\right)^2},\quad c_{x_i} = \frac{s_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}}t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s_x^2 + s_y^2}} \qquad (df = 2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)

   Ist

   $t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)

   Ist

   $|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}}$,

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

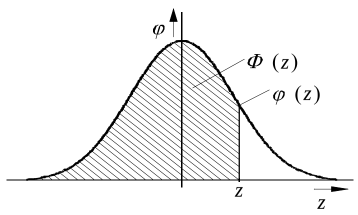
s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,64	1,96	2,33	2,58

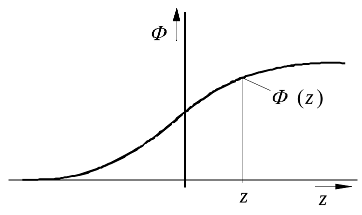
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z