1001

Bitte notieren Sie sich diese Nummer. Unter dieser Nummer finden Sie Ihre Note auf dem Notenaushang.

Name:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsraum:

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

5. September 2014

Klausur Einführung in die Messtechnik

☐ für Bachelor Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Wirtschaftsingenieurwesen Maschinenbau mit Studienbeginn ab WS 2012/13
(Prüfungsnummer 2511161)

☐ für Bachelor Mobilität und Verkehr ab BPO 2011
(Prüfungsnummer 2511141)

☐ sonstige: ________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	AWV A	AWV B	KF	Gesamt
PUNKTE						

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle, einschließlich deren Bedienungsanleitung in gedruckter Form, zugelassen. Sonstige schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 13 bis 17 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

Eulersche Zahl: $e = 2{,}718281828459045235...$

Volumenstrom: $1\ m^3/s = 10^3\ l/s = 60 \cdot 10^3\ l/min = 3600\ m^3/h$

1. Aufgabe:

Bei der Ultraschall-Durchflussmessung macht man sich den Sachverhalt zunutze, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Schallwellen in bewegten Flüssigkeiten von deren Strömungsgeschwindigkeit beeinflusst wird.

Sendet man in einem durchströmten Rohr Ultraschallsignale in Strömungsrichtung aus, so beträgt die resultierende Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Signale $a + v$; a ist hierbei die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Medium, v ist die Strömungsgeschwindigkeit. Entgegen der Strömungsrichtung ausgesandte Signale breiten sich dagegen nur mit der resultierenden Geschwindigkeit $a - v$ aus.

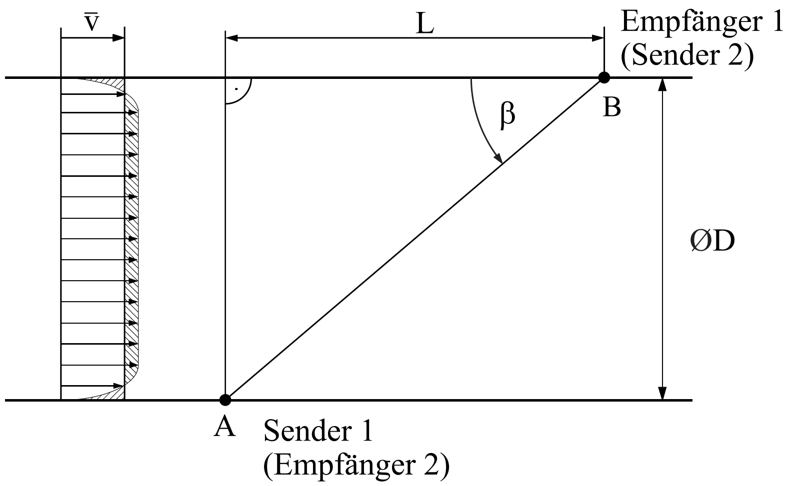


Abbildung 1.1: Prinzip der Ultraschall-Durchflussmessung

Allgemein kann man den Durchfluss eines Rohres bei bekannter Geometrie ermitteln, wenn es gelingt, die mittlere Geschwindigkeit der Strömung zu bestimmen. Hierzu kann die in nebenstehender Abbildung 1.1 skizzierte Anordnung verwendet werden. Die gesuchte mittlere Geschwindigkeit erhält man hier, indem die Schallsignale nicht parallel zu den Stromlinien ausgesendet werden, sondern unter einem bestimmten Winkel β hierzu. Man sendet zunächst Ultraschallsignale im Punkt A aus und fängt sie im Punkt B wieder auf; die Laufzeit t_1 wird gemessen. Anschließend wird von B nach A gesendet, jetzt misst man die Laufzeit t_2. Aus den bekannten Abmessungen und den Messergebnissen für die Laufzeiten kann der Durchfluss berechnet werden. Für den Fall eines kreisförmigen Rohrquerschnitts ist der Volumenstrom $\dot{Q}$ für die in Abbildung 1.1 skizzierte Anordnung durch folgenden Zusammenhang definiert:

$$\dot{Q} = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot \left(\frac{L}{2} + \frac{D^2}{2L} \right) \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right)$$

Hierin ist D der Rohrdurchmesser, L der Abstand der Messstellen A und B in Rohrrichtung, t_1 die in Strömungsrichtung (A→B) gemessene Laufzeit sowie t_2 die entgegen der Strömungsrichtung (B→A) gemessene Laufzeit.

Im Folgenden soll der Volumenstrom $\dot{Q}$ auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen D, L, t_1 und t_2 einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden. Der Rohrdurchmesser wurde mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% in 10 Messungen zu $D = 100\ \text{mm} \pm 0{,}1\ \text{mm}$ bestimmt. Die Laufzeiten wurden mehrfach gemessen. Es ergaben sich mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% folgende Messergebnisse: $t_1 = 137{,}617\ \mu\text{s} \pm 1\ \text{ns}$ und $t_2 = 138{,}246\ \mu\text{s} \pm 1\ \text{ns}$.

Fortsetzung Aufgabe 1 auf der nächsten Seite

Die Entfernung L der Anbringungsorte A und B der Ultraschallsender bzw. -empfänger (siehe Abbildung 1.1) wurde im Vorfeld achtmal gemessen. Es ergeben sich die in Tabelle 1.1 zusammengefassten Einzelmesswerte.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
L / mm	173,24	173,09	173,18	173,22	173,11	173,39	173,21	173,24

Tabelle 1.1: Messwerte der Länge L

a) Berechnen Sie den gesuchten Volumenstrom $\dot{Q}$ und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 99% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Bei Ihrem Arbeitgeber, einem Hersteller für Antriebstechnik, werden Kugelgewindestangen für den Einsatz in Fahrzeuglenkungen produziert. Am Ende des Fertigungsprozesses werden alle Kugelgewindestangen einer eingehenden messtechnischen Überprüfung unterzogen, um deren Übereinstimmung mit der Spezifikation sicherzustellen. Kugelgewindestangen, welche nicht der Spezifikation entsprechen werden als Ausschuss deklariert und gelangen nicht zur Auslieferung.

Um Entwicklungen des Fertigungsprozesses erkennen zu können, wird in der Datenbank des Qualitätsmanagementsystems unter anderem die Zahl der pro Schicht als Ausschuss deklarierten Teile abgespeichert. Insgesamt liegen zum gegenwärtigen Zeitpunkt Daten für n = 500 Schichten vor. In Tabelle 2.1 ist zusammengefasst, in wie vielen dieser n Schichten jeweils 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 und mehr Teile als Ausschuss deklariert wurden.

Anzahl Ausschuss	0	1	2	3	4	5 und mehr
Häufigkeit	58	141	129	94	55	23

Tabelle 2.1: Ermittelte Häufigkeiten für Anzahl k der pro Schicht erkannten Ausschussteile

Da die Anzahl der Ausschussteile gemessen an der Gesamtzahl der gefertigten Teile sehr gering ist, haben Sie die Vermutung, dass die beobachtete Verteilung einer Poisson-Verteilung genügt.

Die Wahrscheinlichkeit P_λ dafür, dass bei einem Poisson-verteilten Prozess k Ereignisse registriert werden, ist durch folgenden Ausdruck definiert:

$$P_\lambda(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Hierin steht k für die Anzahl der registrierten Ereignisse (im vorliegenden Fall also für die Zahl der pro Schicht erkannten Ausschussteile), λ ist der Parameter der Poisson-Verteilung und e ist die Eulersche Zahl (Basis der natürlichen Exponentialfunktion).

Den Parameter λ haben Sie anhand des für die Poisson-Verteilung geltenden Zusammenhangs $\mu = \lambda$ im Vorfeld anhand der in Tabelle 2.1 gegebenen Daten zu $\lambda = 2$ abgeschätzt.

a) Untersuchen Sie mittels eines Chi-Quadrat-Tests, ob die in Tabelle 2.1 angegebene Verteilung auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}1$ einer Poisson-Verteilung mit dem Parameter $\lambda = 2$ genügt!

Erläuterungen zu Aufgaben nach dem Antwort-Wahl-Verfahren:

Bei jeder Fragestellung wird im Anschluss an die Antwortalternativen angegeben, um welchen Fragetyp es sich handelt. Die möglichen Fragetypen sind nachfolgend näher erläutert.

- *Fragetyp Einfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Bei Fragen dieses Typs wird nur dann eine von null Punkten verschiedene Bewertung vergeben, wenn genau die eine korrekte Antwort markiert wurde.
- *Fragetyp Mehrfachwahl*: Bei Fragen dieses Typs ist mindestens eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Entsprechend können auch mehrere oder alle Antwortalternativen korrekt sein. Bei Fragen dieses Typs werden auch dann anteilig Punkte vergeben, wenn einzelne Antworten unzutreffend sind (korrekte Antwort fälschlich nicht markiert oder unkorrekte Antwort fälschlich markiert). Hierbei gilt jedoch, dass eine Frage, bei welcher keine der Antworten markiert wurde als nicht bearbeitet gilt und mit null Punkten bewertet wird.

Für alle Fragetypen gilt, dass eine Frage nicht mit weniger als null Punkten bewertet werden kann. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Antwort-Wahl-Verfahren, Teil A:

3. Bei einem Hersteller von Kupplungsdruckstiften für Motorradantriebe wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Durchmesser der zylinderförmigen Druckstifte überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 12$ entnommen und der Durchmesser D der Druckstifte ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 14{,}98$ mm und eine Streuung von $S_D = 0{,}014$ mm. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

3.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Druckstiftdurchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% beträgt für diesen Fall gerundet:

a) D = 14,98 mm ± 0,0089 mm; P = 98% ☐
b) D = 14,98 mm ± 0,0094 mm; P = 98% ☐
c) D = 14,98 mm ± 0,0110 mm; P = 98% ☐
d) D = 14,98 mm ± 0,0123 mm; P = 98% ☐
e) D = 14,98 mm ± 0,0126 mm; P = 98% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers auf maximal ± 0,006 mm abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 6 ☐
b) n = 17 ☐
c) n = 21 ☐
d) n = 24 ☐
e) n = 26 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 3 auf der nächsten Seite

3.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Wie viel Prozent aller Druckstifte weisen dann etwa einen Durchmesser im Bereich 14,97 mm ≤ D ≤ 15,01 mm auf?

a) 23,9% ☐
b) 25,5% ☐
c) 68,3% ☐
d) 74,5% ☐
e) 98,4% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Sie möchten für zwei in Ihrem Besitz befindliche PKW unterschiedlichen Typs überprüfen, ob deren Benzinverbrauch die jeweilige Herstellerangabe nach NEFZ einhält. Hierzu ermitteln Sie über jeweils n = 20 Tankfüllungen den Durchschnittsverbrauch beider Fahrzeuge. Die so ermittelten Verbräuche beider Fahrzeuge vergleichen Sie jeweils mit dem Normverbrauch laut Herstellerangabe. Sie möchten für beide Fahrzeuge separat jeweils die Frage beantworten, ob der Verbrauch mit dem Normverbrauch übereinstimmt oder aber diesen übersteigt.

4.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) lineare Regression ☐
b) t-Test für Erwartungswert ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei <u>un</u>abhängigen Stichproben ☐
d) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

5. Anhand zweier unabhängiger Stichproben möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 30 aufweisen, haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Größen x und y ermittelt zu $\overline{x}$ = 12,03 mm, S_x = 0,27 mm, $\overline{y}$ = 11,98 mm und S_y = 0,29 mm.

5.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) 0,366 ☐
b) 0,691 ☐
c) 0,978 ☐
d) 3,786 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Fortsetzung Aufgabe 5 auf der nächsten Seite

5.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 28 ☐
b) 29 ☐
c) 58 ☐
d) 59 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6. Sie möchten mittels eines t-Tests für den Vergleich zweier Erwartungswerte die Wirksamkeit zweier Nahrungsergänzungsmittel A und B zum Muskelaufbau vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt n = 20. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Wirkung der Nahrungsergänzungsmittel sich nicht unterscheidet ($\mu_x = \mu_y$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_x \neq \mu_y$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = 1{,}94$.

6.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

6.2. Angenommen, die Nullhypothese würde <u>nicht</u> abgelehnt. Welche Aussage in Bezug auf die Wirksamkeit der untersuchten Nahrungsergänzungsmittel A und B wäre dann am zutreffendsten?

Die Wirkung der Nahrungsergänzungsmittel A und B

a) unterscheidet sich wahrscheinlich. ☐
b) unterscheidet sich definitiv. ☐
c) unterscheidet sich wahrscheinlich <u>nicht</u>. ☐
d) unterscheidet sich definitiv <u>nicht</u>. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

<u>Antwort-Wahl-Verfahren, Teil B:</u>

7. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um <u>intensive</u> Größen handelt!

a) Temperatur ☐
b) Wärmekapazität ☐
c) Molare Masse ☐
d) elektrische Spannung ☐
e) Volumen ☐
f) Druck ☐
g) Stoffmenge ☐
h) Entropie ☐

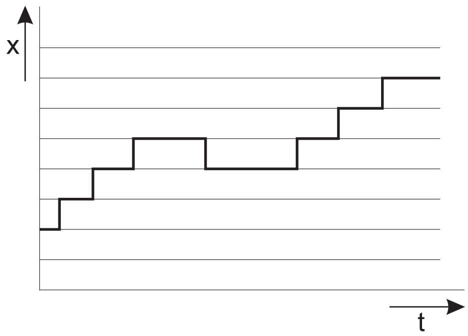
(Fragetyp Mehrfachwahl)

8. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) 10^{-3} kg + 10^{6} µg = 2 g ☐
b) 1 pF = 10^{3} nF ☐
c) 99 cm + 1 mm = 1 m ☐
d) 10 mA + 100 µA = $1{,}01 \cdot 10^{-2}$ A ☐
e) 1 m³/s + 100 cm³/s = 1,01 m³/s ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

9. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor K = 1 werde zum Zeitpunkt t = 0 mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 0 V auf 20 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer t = T am Ausgang etwa anliegen?

a) 5 V ☐
b) 6,3 V ☐
c) 10 V ☐
d) 12,6 V ☐
e) 18 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Eine normalverteilte, dimensionslose Größe werde mit 10 Wiederholungen gemessen. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes wird zu $12 \le \mu \le 30$ bei P = 95% bestimmt. Die Standardabweichung σ sei bekannt. Geben Sie an, wie viele Wiederholungsmessungen durchgeführt werden müssten, um das Konfidenzintervall bei unveränderter Aussagesicherheit auf $18 \le \mu \le 24$ zu reduzieren!

a) 30 ☐
b) 90 ☐
c) 100 ☐
d) 160 ☐
e) 200 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12. Auf dem Wochenmarkt nutzt ein Gemüsehändler eine Balkenwaage zum Wiegen der Ware. Dabei wirken sich zwei Störeinflüsse auf die Messung aus. Charakterisieren Sie jeweils die zwei nachfolgend beschriebenen Störeinflüsse!

12.1. Da die Waage am Rand der Überdachung des Standes aufgebaut ist, wird bei Sonnenschein eine Seite des Messbalkens stärker erwärmt als die andere.

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

12.2. Da die Waage am Rand der Überdachung des Standes aufgebaut ist, sammelt sich bei Regen etwas Wasser in einer der Waagschalen.

a) superponierender äußerer Störeinfluss ☐
b) deformierender äußerer Störeinfluss ☐
c) innerer Störeinfluss ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

13. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem mit roten und grünen Kugeln gefüllten Gefäß zufällig n Kugeln nacheinander entnehmen, wobei Sie jede Kugel sofort nach ihrer Entnahme wieder in das Gefäß zurücklegen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit beschreiben, mit der bei diesem Versuch eine bestimmte Anzahl roter Kugeln gezogen wird?

a) Binomialverteilung ☐
b) Normalverteilung ☐
c) Gleichverteilung ☐
d) Poissonverteilung ☐
e) Hypergeometrische Verteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

14. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

a) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf <u>nicht</u> für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐
b) Als Fehlentscheidung 1. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 <u>nicht</u> abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich <u>nicht</u> zutrifft. ☐
c) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% eine Fehlentscheidung 2. Art auftritt. ☐
d) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen abzusichern oder begründet zu verwerfen. ☐
e) Die Güte eines statistischen Tests lässt sich durch Vergrößerung des zugrunde gelegten Stichprobenumfangs erhöhen. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

15. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich Handmessmitteln zutreffend sind!

a) Der Messschieber ist anfällig für das Auftreten des Abbefehlers, da bei ihm Antast- und Messlinie nicht fluchten. ☐

b) Der Nonius eines Messschiebers dient dazu, bei der Ablesung der Skala das Auftreten eines Parallaxenfehlers zu vermeiden. ☐

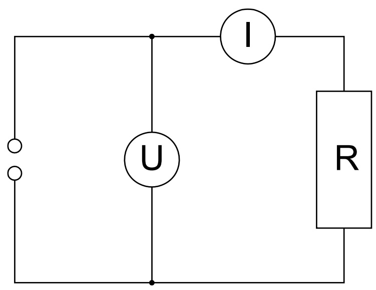
c) Bei der Bügelmessschraube stellt in der Regel eine Rutschkupplung eine bei allen Messungen gleiche Antastkraft sicher. ☐

d) Bei der Messuhr wird die Auslenkung des Messbolzens über ein Präzisionsgetriebe in eine Zeigerdrehung gewandelt. ☐

e) Bei der Längenmessung mittels eines Maßstabes handelt es sich um eine direkte Messmethode im weiteren Sinne. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

16. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehlerschaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐

b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Ohmschen Gesetzes. ☐

c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐

d) Die systematische Messabweichung der Schaltung würde zu Null werden, wenn das verwendete Spannungsmessgerät einen unendlich hohen Innenwiderstand aufweisen würde. ☐

e) Bei bekannten Innenwiderständen von Strom- und Spannungsmessgerät kann der korrekte Widerstandswert von R mittels einer Korrekturformel ermittelt werden. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

17. Ein analoges Spannungssignal im Bereich von –10 V bis 10 V soll so digitalisiert werden, dass der maximale Quantisierungsfehler 1 µV beträgt. Geben Sie an, mit wie viel Bit der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten muss!

a) 14 Bit ☐

b) 20 Bit ☐

c) 24 Bit ☐

d) 25 Bit ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Kurzfragen:

18. Geben Sie an, ob die Aussage „Die Messunsicherheit kann beliebig klein gemacht werden, wenn man ausreichend viele Wiederholungen der Messung durchführt“ zutreffend ist! Begründen Sie Ihre Aussage!

19. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

20. Ein Rechtecksignal mit einer Periodendauer von 5 ms werde mit einer Abtastrate von 1 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

21. Geben Sie an, wie groß die Fläche unter der Verteilungsdichtefunktion einer Binomialverteilung $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ mit dem Parameter p = 0,3 ist!

22. Geben Sie an, welcher Punkt bei der linearen Regression stets auf der berechneten Geraden liegt!

23. Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

24. Geben Sie an, welche beiden grundlegenden Typen von mechanischen Tastern man in der Koordinatenmesstechnik unterscheidet! Erläutern Sie deren Unterschied hinsichtlich der über den Antastvorgang gelieferten Information!

25. Geben Sie an, wie viele Takte ein A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren maximal für die Digitalisierung einer Messgröße mit 16 Bit Auflösung benötigt!

26. Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Im Auftrag der ESA sollen Sie analysieren, welche Grundprinzipien von Waagen für diesen Zweck einsetzbar sind. Ihre Großmutter schlägt vor, hierfür eine Balkenwaage und einen Satz kalibrierter Massestücke einzusetzen, wie sie dies noch aus ihrer Jugend vom Wochenmarkt kennt.

a) Geben Sie an, ob eine derartige Wägeanordnung auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung erwarten lässt! Begründen Sie Ihre Antwort!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x^* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y^* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für *f* mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f, \; f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 < -t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $t_0 > t_{n-1;1-\alpha}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$,
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.
Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;\,1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

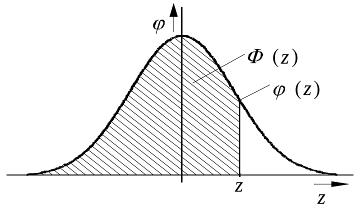
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

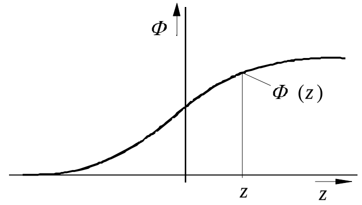
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1\text{-}1{,}350\cdot10^{-3}$	$1\text{-}2{,}326\cdot10^{-4}$	$1\text{-}3{,}167\cdot10^{-5}$	$1\text{-}3{,}398\cdot10^{-6}$	$1\text{-}2{,}867\cdot10^{-7}$	$1\text{-}9{,}866\cdot10^{-10}$	$1\text{-}1{,}280\cdot10^{-12}$	$1\text{-}6{,}221\cdot10^{-16}$	$1\text{-}1{,}129\cdot10^{-19}$	$1\text{-}7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z