Name: ______________________________

Matrikel-Nr.: ________________________

Prüfungsraum: ______________________

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG

05. September 2012

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Bachelor: ______________________

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Maschinenbauer nach DPO 2003

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
für Wirtschaftsingenieure/MB nach DPO 2004

☐ **Klausur Einführung in die Messtechnik**
sonstige: _________________________

Zutreffendes bitte ankreuzen!

AUFGABE	1	2	3	4	Gesamt
PUNKTE					

NOTE

Hinweise zur Prüfung

1. Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

2. Als Hilfsmittel sind ausschließlich Taschenrechner ohne vorgefertigte Programme und ohne drahtlose Kommunikationsschnittstelle zugelassen. Schriftliche Unterlagen sowie Bild-, Ton- und Videodokumente sind ausdrücklich nicht zugelassen. Die Verwendung elektronischer Geräte mit drahtloser Kommunikationsschnittstelle, gleich zu welchem Zweck, ist während der Klausur untersagt. Verstöße dagegen bzw. andere Täuschungsversuche werden gemäß der Prüfungsordnung geahndet.

3. Auf das Deckblatt sind der Name, der Vorname, die Matrikelnummer und die Bezeichnung des Raumes, in welchem die Prüfung abgelegt wird einzutragen. Ferner ist anzugeben, für welchen Studiengang (ggf. einschließlich geltender Prüfungsordnung) die Prüfung abgelegt wird. Auf allen anderen abgegebenen Blättern ist zumindest der Name zu vermerken. Das Deckblatt ist als oberes Blatt der Klausur abzugeben. Der Rest der Aufgabestellung muss nicht abgegeben werden, sofern er keine für die Lösung relevanten Eintragungen enthält.

4. Der Studierendenausweis ist zusammen mit einem Lichtbildausweis und dem ausgefüllten Deckblatt der Aufgabenstellung sichtbar auszulegen.

5. Alle zur Lösung der gestellten Aufgaben benötigten nichttrivialen Gleichungen und Konstanten sowie alle notwendigen Tabellen und Diagramme sind der folgenden Formelsammlung, der Aufgabenstellung selbst oder dem Anhang auf den Seiten 8 bis 12 zu entnehmen.

Formelsammlung:

Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

Kettenregel: $\frac{dy}{dx} = u'(v)v'(x) \quad \text{mit} \quad y = u(v(x))$

elektrische Spannung: 1 V (Volt) = 1 W/A = 1 $kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$

elektrischer Widerstand: 1 Ω = 1 V/A = 1/S = 1 W/A^2 = 1 $kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$

magnetische Flussdichte: 1 T (Tesla) = 1 Wb/m^2 = 1 $V \cdot s/m^2$ = 1 $kg/(s^2 \cdot A)$

1. Aufgabe:

Wird ein vom Erregerstrom i_k durchflossener Leiter auf der Länge L senkrecht zur Stromrichtung von einem magnetischen Feld der Flussdichte B durchsetzt, so wirkt auf ihn senkrecht zu i_k und B die Lorentzkraft F_L:

$$F_L = B \cdot i_k \cdot L$$

Dieser Effekt lässt sich in der Wägetechnik wirkungsvoll zur Erzeugung von Kompensationskräften nutzen, die einem elektrischen Strom streng proportional sind.

Der elektrische Leiter wird, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, in Form einer Spule der Windungszahl w und des Durchmessers D auf einen parallel geführten Träger gewickelt und taucht in den Ringspalt eines Topfkernmagneten ein. Dieser weise in seinem gesamten Spaltvolumen ein homogenes, radial gerichtetes Magnetfeld der Flussdichte B auf. Der Kompensationsstrom wird der Spule geregelt über bewegliche Stromzuführungen in einer solchen Höhe zugeleitet, dass nach Auflegen des Wägegutes die vom Wegaufnehmer (WA) registrierten Auslenkungen des bewegten Systems auf Null zurückgeführt werden. In diesem Zustand wird die Gewichtskraft F_G des Wägegutes (Masse m_w) von der Lorentzkraft F_L der Tauchspule gerade kompensiert. Der Strom i_k ist dann ein Maß für die zu bestimmende Masse m_w des Wägegutes. Er wird über einen Präzisionswiderstand R in eine Spannung U_m umgeformt, welche als Messsignal weiterverarbeitet werden kann.

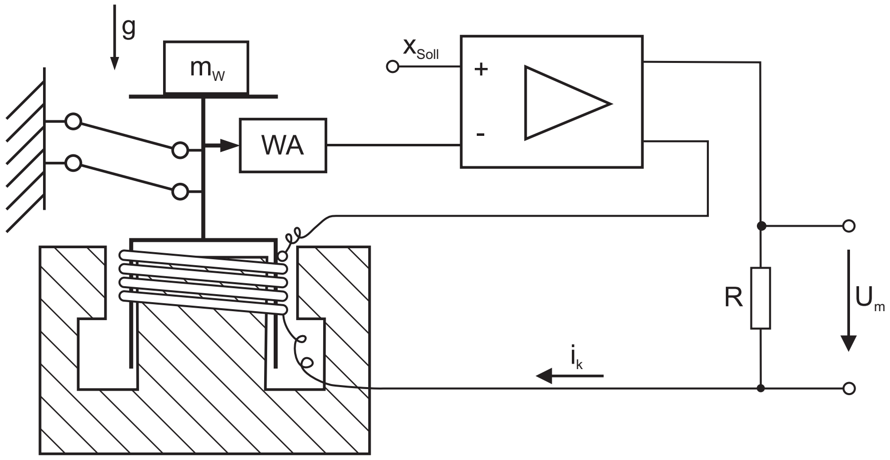


Abbildung 1.1: Prinzip der elektrodynamischen Kraftkompensation

Eine Betrachtung des Kräftegleichgewichts führt zu folgender Abhängigkeit der Masse m_W des Wägegutes von den Parametern w, D, B, U_m und R sowie der Schwerkraft g:

$$m_w = \frac{\pi \cdot w \cdot D \cdot B \cdot U_m}{g \cdot R}$$

Im Folgenden soll die Masse des Wägegutes m_w auf der Grundlage von Messergebnissen für die Größen B, D, U_m und R einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen ermittelt werden. Die Windungszahl der Spule betrage $w = 200$, die Erdbeschleunigung ist mit $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ angegeben. (Anm.: Diese beiden Werte können als exakt angesehen werden.)

Die magnetische Flussdichte B im Ringspalt wurde vorab in 20 Messungen mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 99\ \%$ zu $B = 0{,}4\ T \pm 0{,}002\ T$ bestimmt. Der Messwiderstand beträgt $R = 1\ \Omega$, der Hersteller gibt mit $P = 95\ \%$ einen Vertrauensbereich von 0,1 % des Nennwertes an (sehr großer Stichprobenumfang n).

Der Spulendurchmesser D wurde in insgesamt n = 10 Messungen ermittelt. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte erhalten:

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
D / mm	70,02	69,97	70,03	70,01	69,95	69,99	69,98	70,05	70,01	69,99

Tabelle 1.1: Messwerte des Spulendurchmessers D

Bei Belastung mit dem Wägegut ergibt sich für die Messspannung mit einer Aussagesicherheit von $P = 95\ \%$ der Wert $U_m = 2{,}9\ V \pm 0{,}01\ V$.

a) Berechnen Sie die gesuchte Masse m_w des Wägegutes und geben Sie das vollständige Messergebnis mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

2. Aufgabe:

Im Rahmen einer Wareneingangsprüfung werden hochfeste Schrauben hinsichtlich Ihrer 0,2%-Dehngrenze $R_{p0,2}$ untersucht. Dabei wird gemäß DIN EN ISO 898 ein Zugversuch an abgedrehten Schrauben durchgeführt. Die für eine Stichprobe von insgesamt zehn Proben ermittelten Dehngrenzen sind aus Tabelle 2.1 zu ersehen:

Proben-Nr.	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$R_{p0,2}$ / N/mm²	897	898	900	901	897	896	903	904	902	899

Tabelle 2.1: Aktuelle Stichprobe der 0,2%-Dehngrenze

a) Die Standardabweichung σ sei unbekannt. Berechnen Sie für diesen Fall das Konfidenzintervall des Mittelwertes der 0,2%-Dehngrenze für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95%.

b) Aufgrund langjähriger Erfahrung sei bekannt, dass die Standardabweichung der 0,2%-Dehngrenze $\sigma = 3$ N/mm² beträgt. (*Gilt nur für Teilaufgabe b)!*) Berechnen Sie für diesen Fall den erforderlichen Stichprobenumfang, damit bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95 % das Konfidenzintervall des Mittelwertes der 0,2%-Dehngrenze maximal ± 1 N/mm² beträgt!

c) Die gelieferten Schrauben der Festigkeitsklasse 10.9 müssen im Mittel eine 0,2%-Dehngrenze von mindestens 900 N/mm² aufweisen. Prüfen Sie mittels eines statistischen Tests, ob sich mit obiger Stichprobe auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ zeigen lässt, dass die Schrauben diese Vorgabe nicht erfüllen!

d) Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Wie viel Prozent aller Schrauben weisen dann eine 0,2%-Dehngrenze von weniger als 900 N/mm² auf?

Die obige Stichprobe wird mit einer Stichprobe verglichen, die aus einer früheren Charge entnommen wurde. Damals wurden die in Tabelle 2.2 zusammen gefassten Einzelmesswerte ermittelt:

Proben-Nr.	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$R_{p0,2}$ / N/mm²	901	903	907	905	906	903	902	909	900	905

Tabelle 2.2: Frühere Stichprobe der 0,2%-Dehngrenze

e) Prüfen Sie mittels eines statistischen Tests, ob die zuletzt gelieferten Schrauben auf einem Singifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$ eine niedrigere Dehngrenze aufweisen, als die früher gelieferten Schrauben!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden.

3. Aufgabe:

Ein sogenannter „fairer Würfel“ zeichnet sich dadurch aus, dass alle Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen werden. Da Sie in der letzten Zeit beim „Mensch-Ärgere-Dich-Nicht“-Spiel etwas das Glück verlassen hat, möchten Sie überprüfen, ob ihr sechsseitiger Würfel denn auch ein „fairer Würfel“ ist. Hierzu führen Sie 300 Würfe aus und erhalten die in Tabelle 3.1 zusammen gefassten Häufigkeiten für die Augenzahlen 1 bis 6.

Augenzahl	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Häufigkeit	42	51	56	48	52	51

Tabelle 3.1: Gewürfelte Häufigkeiten der Augenzahlen 1 bis 6

a) Untersuchen Sie mittels eines geeigneten statistischen Tests, ob der Würfel auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als „fair“ bezeichnet werden kann!

<u>4. Aufgabe:</u>

1.) Geben Sie an, bei welchen der folgenden Größen es sich <u>nicht</u> um Grundgrößen des SI-Systems handelt!
Gewichtskraft, elektrische Ladung, Lichtstrom, Dichte, molare Masse

2.) Geben Sie an, woran man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden kann!

3.) Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quintils (Q1) oder oberhalb des vierten Quintils (Q4) liegen!

4.) Sie sitzen bei leichtem Regen auf der Terrasse eines Cafés und beobachten, wie Regentropfen in Ihre Tasse fallen. Je Minute sind es durchschnittlich 10 Tropfen.

a) Geben Sie an, durch welche statistische Verteilung dieser Vorgang beschrieben wird!

b) Geben Sie an, wie groß der Erwartungswert für die Anzahl der Tropfen innerhalb von 10 Minuten ist!

c) Geben Sie an, wie groß die Standardabweichung für den Erwartungswert aus b) ist!

5.) Bei der Messung einer Kraft wird festgestellt, dass die Messgröße normalverteilt ist und dass 99,73% aller Messwerte im Intervall [124 N; 136 N] liegen. Die Verteilungsdichtefunktion wird gezeichnet und die beiden Wendestellen der Kurve werden bestimmt.

a) Geben Sie an, welchen Abstand in Newton die Wendestellen aufweisen?

6.) Von der Qualitätssicherung Ihres Unternehmens wird mittels eines statistischen Tests überprüft, ob die produzierte Ware der geforderten Spezifikation entspricht. Dabei wird als Nullhypothese angenommen, dass die Ware die Spezifikation erfüllt. Für die Durchführung des Tests wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$ vorgegeben. Aufgrund von Kundenbeschwerden möchten Sie die Zahl der trotz Verletzung der Spezifikation ausgelieferten Teile reduzieren.

a) Geben Sie an, ob die Irrtumswahrscheinlichkeit α zu diesem Zweck erhöht oder verringert werden muss! Begründen Sie Ihre Antwort!

7.) Erläutern Sie, welcher Fehlereinfluss bei der Messung Ohmscher Widerstände durch Verwendung einer Vierleiterschaltung vermieden werden kann!

Fortsetzung nächste Seite

8.) Eine elektrische Spannung im Bereich zwischen –24 V und +24 V mit einer maximalen Signalfrequenz von f_{max} = 80 kHz soll so digitalisiert werden, dass

i) das Abtasttheorem nach Shannon eingehalten wird und

ii) die maximale Quantisierungsabweichung weniger als 15 µV beträgt.

Geben Sie an,

a) welche Abtastfrequenz mindestens erforderlich ist!

b) welche Auflösung in Bit mindestens erforderlich ist!

c) welche Datenmenge in Byte (à 8 Bit) mindestens erforderlich ist, um drei Minuten des Signals darzustellen!

9.) Zur Messung des Verfahrweges einer Maschinenachse wird ein inkrementales Messsystem mit Glasmaßstab eingesetzt. Der Abstand zwischen der Wirklinie der Bearbeitung und dem Maßstab beträgt 250mm.

a) Geben Sie an, mit welchem systematischen Fehler man rechnen muss!

10.) Bei einer Kompensationswaage wird mit einem Elektromagneten eine Kraft auf die Waagschale ausgeübt, die entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft des Massenstückes ist. Die dazu erforderliche Stromstärke ist ein Maß für die Kraft. Man stellt fest, dass das Messergebnis vom herrschenden Luftdruck abhängt.

a) Geben Sie an, was die Ursache hierfür ist!

b) Geben Sie an, um welche Art Störeinfluss es sich handelt!

Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{xy}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2 \left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten x_1,..., x_n
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

$$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2, 1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungsfortpflanzung

f sei $f(x_1, ..., x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) - c_f \, , \, f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n} c_{x_i} \right)^2} \, , \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i} - 1; 1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1; 1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1; 1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad \text{(df = 2n – 2)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

mit:

$$d_i = x_i - y_i$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, dass X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...,x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet. Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...,x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...,x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*}\frac{\left(B_i-E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl $\geq$ 5)
   - s ist die Zahl der Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist df = r* – s – 1
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,31	12,71	31,82	63,66
2	2,92	4,30	6,96	9,92
3	2,35	3,18	4,54	5,84
4	2,13	2,78	3,75	4,60
5	2,02	2,57	3,36	4,03
6	1,94	2,45	3,14	3,71
7	1,89	2,36	3,00	3,50
8	1,86	2,31	2,90	3,36
9	1,83	2,26	2,82	3,25
10	1,81	2,23	2,76	3,17
11	1,80	2,20	2,72	3,11
12	1,78	2,18	2,68	3,05
13	1,77	2,16	2,65	3,01
14	1,76	2,14	2,62	2,98
15	1,75	2,13	2,60	2,95
16	1,75	2,12	2,58	2,92
17	1,74	2,11	2,57	2,90
18	1,73	2,10	2,55	2,88
19	1,73	2,09	2,54	2,86
20	1,72	2,09	2,53	2,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83
22	1,72	2,07	2,51	2,82
23	1,71	2,07	2,50	2,81
24	1,71	2,06	2,49	2,80
25	1,71	2,06	2,49	2,79
26	1,71	2,06	2,48	2,78
27	1,70	2,05	2,47	2,77
28	1,70	2,05	2,47	2,76
29	1,70	2,05	2,46	2,76
30	1,70	2,04	2,46	2,75
40	1,68	2,02	2,42	2,70
50	1,68	2,01	2,40	2,68
60	1,67	2,00	2,39	2,66
70	1,67	1,99	2,38	2,65
80	1,66	1,99	2,37	2,64
90	1,66	1,99	2,37	2,63
100	1,66	1,98	2,36	2,63
200	1,65	1,97	2,35	2,60
∞	1,65	1,96	2,33	2,58

p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

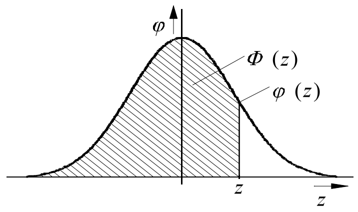
s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

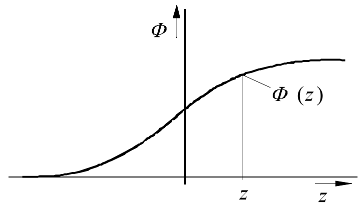
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt \; ; \;\; \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76) = 0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z