Technische Universität Braunschweig

iprom

Übungsunterlagen zur Einführung in die Messtechnik

Prof. Dr.-Ing. Rainer Tutsch

Dr.-Ing. Marcus Petz

Version 2015a

Technische Universität Braunschweig
Institut für Produktionsmesstechnik
Schleinitzstraße 20
38106 Braunschweig

Tel.: 0531 / 391-7028
Fax.: 0531 / 391-5837
Email: iprom@tu-bs.de
URL: www.iprom.tu-bs.de

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1: Lage- und Streuungsparameter

Die Körpergröße L von 16 Personen wurde experimentell ermittelt. Dabei wurden die in Tabelle 1.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte erhalten:

L / m	1,60	1,78	1,67	1,73	1,70	1,84	1,68	1,81
	1,72	1,72	1,67	1,67	1,75	1,88	1,70	1,76

Tabelle 1.1: Körpergröße L der untersuchten Personen

a) Bestimmen Sie zu obiger Messreihe die Lageparameter Modalwert, Median und Mittelwert!

b) Bestimmen Sie zu obiger Messreihe die Streuungsparameter Spannweite, Quartilsabstand, empirische Varianz und empirische Streuung!

Aufgabe 2: Histogramm

Im Rahmen einer Stichprobe werde eine Zufallsgröße x 30-mal gemessen. Dabei werden die in Tabelle 2.1 zusammen gefassten Einzelmesswerte beobachtet:

x	4,621	4,625	4,625	4,620	4,574	4,639
	4,642	4,631	4,616	4,607	4,641	4,622
	4,640	4,651	4,601	4,609	4,620	4,634
	4,599	4,619	4,627	4,593	4,589	4,611
	4,613	4,608	4,614	4,630	4,628	4,612

Tabelle 2.1: Stichprobe einer Zufallsgröße x

a) Zeichnen Sie das Histogramm der Verteilung. Wählen Sie dazu Klassenbreite und Klassenanzahl sinnvoll.

b) Zeichnen Sie basierend auf dem unter Aufgabenteil a) erstellten Histogramm die relative Summenhäufigkeit der Verteilung.

c) Schätzen Sie ausgehend von der obigen Stichprobe den Erwartungswert und die Standardabweichung der zugrunde liegenden Grundgesamtheit ab.

Aufgabe 3: Normalverteilte Messgrößen

In einer Fertigungsabteilung für Festplatten von Personal-Computern werden in einem Feinschleifprozess Positionierstifte für Schreib-Lese-Köpfe hergestellt. Nach langer Beobachtung der Fertigung konnte festgestellt werden, dass bei einwandfrei eingestellten Bearbeitungsmaschinen eine Normalverteilung der Stiftdurchmesser mit einem Erwartungswert von $\mu_d = 4{,}15$ mm und einer Standardabweichung von $\sigma_d = 0{,}064$ mm vorliegt.

a) Geben Sie an, wie viel Prozent aller gefertigten Stifte bei den oben angegebenen Prozessparametern einen Durchmesser von $d_i \leq 4{,}3$ mm aufweisen.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass bei einer Stichprobe der Durchmesser d eines einzeln entnommenen Stiftes im Bereich $4{,}09 \text{ mm} \leq d_i \leq 4{,}23$ mm liegt!

c) Geben Sie an, wie viel Prozent aller Positionierstifte bei den oben angegebenen Prozessparametern einen Durchmesser im Bereich $4{,}086 \text{ mm} \leq d_i \leq 4{,}214$ mm aufweisen!

d) Auf welchen Wert muss die Standardabweichung verbessert werden, wenn bei gleichem Erwartungswert μ_d mindestens 80% der Positionierstifte in den Toleranzgrenzen $4{,}086 \text{ mm} \leq d_i \leq 4{,}214$ mm liegen sollen?

e) Es werden nacheinander 20 Messreihen vom Stichprobenumfang $n = 5$ unter gleichen Randbedingungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen die dabei errechneten Mittelwerte in den unter Aufgabenteil b) genannten Bereich?

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 4: Konfidenzintervall

Es werden 10 Wiederholungen einer Messung der Länge L durchgeführt. Dabei ergeben sich die in Tabelle 4.1 aufgeführten Einzelmesswerte.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
L / mm	117	119	116	117	115	121	132	118	125	126

Tabelle 4.1: Stichprobe der Länge L

a) Schätzen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der obiger Messreihe zugrunde liegenden Grundgesamtheit ab!

b) Schätzen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a) den Erwartungswert μ_L mit einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 95\%$ (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$) ab!

c) Wie viele Wiederholungen der Messung wären erforderlich, um für das Konfidenzintervall ±3 mm eine statistische Sicherheit von 95% zu erreichen?

d) Angenommen, es wäre bekannt, dass die Standardabweichung der zugrunde liegenden Grundgesamtheit $\sigma = 5{,}5$ mm beträgt. Wie viele Wiederholungen der Messung werden dann benötigt, um für das Konfidenzintervall ±3 mm eine statistische Sicherheit von 95% zu erreichen?

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 5: Abweichungsfortpflanzung

Es soll die Fläche A eines Rechtecks mit den Kantenlängen a und b ermittelt werden. Hierzu werden a und b jeweils in mehreren Messungen bestimmt und das Konfidenzintervall ermittelt. Es ergeben sich folgende vollständige Messergebnisse für die Kantenlängen a und b:

$a = 15\text{ mm} \pm 0{,}2\text{ mm};\ P = 95\%$

$b = 10\text{ mm} \pm 0{,}1\text{ mm};\ P = 95\%$

a) Geben Sie das vollständige Messergebnis der Fläche A des Rechtecks einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 6: Abweichungsfortpflanzung

In einem Unternehmen soll der Radius eines Zylinders mit einem Nenndurchmesser von 100 mm bestimmt werden. Dem Messtechniker des Unternehmens stehen hierzu zwei Messmittel zur Verfügung. Zum einen kann der Durchmesser des Zylinders mit einem digitalen Messschieber bestimmt werden, zum anderen kann eine spezielle Messvorrichtung mit einer 3-Punkt-Antastung genutzt werden.

Der Messschieber ist in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt. Da ein Messschieber prinzipbedingt anfällig für den Abbefehler ist, da Messlinie und Antastlinie nicht fluchten, führt ein Winkelfehler des beweglichen Antastelements zu einer zusätzlichen Messunsicherheit.

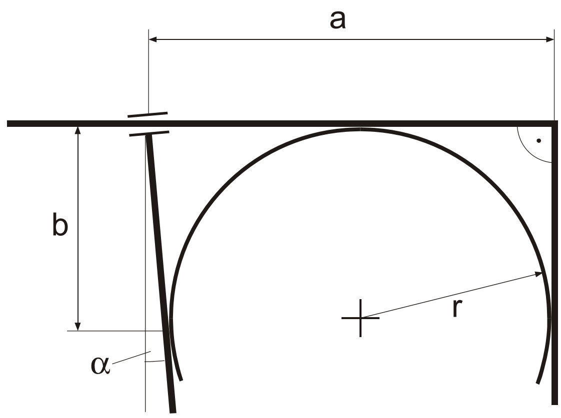


Abbildung 6.1: Messschieber

Für kleine Winkel α ist der zu messende Radius r in guter Näherung durch folgenden Zusammenhang definiert:

$$r = \frac{1}{2}\left(a - b \cdot \tan\alpha\right)$$

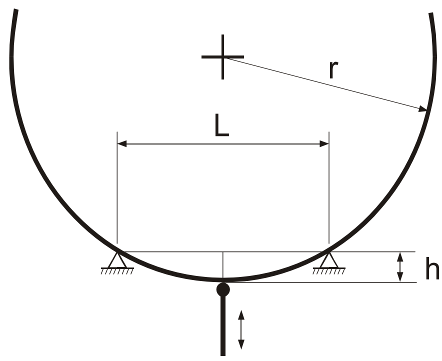


Abbildung 6.2: 3-Punkt-Antastung

Das Messgerät mit 3-Punkt-Antastung ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Die eigentliche Antastvorrichtung besteht aus zwei feststehenden, punktförmigen Auflagern, die zueinander den Abstand L haben. In der Mitte zwischen diesen Auflagern befindet sich ein Messtaster, der zur Messung auf die Oberfläche abgesenkt wird. So kann das Maß h ermittelt werden, das den vertikalen Abstand zwischen der Verbindungslinie der Auflager und dem Antastpunkt darstellt.

Der Radius r ist dabei durch folgenden Zusammenhang gegeben:

$$r = \frac{h}{2} + \frac{L^2}{8 \cdot h}$$

Mit beiden Messmitteln wird der Radius bestimmt.

Die folgenden Werte für die Messung mit dem Messschieber sind bekannt:

Der Winkel α wird vom Hersteller mit $\alpha = 0° \pm 0{,}05°$ mit $P = 98\%$ und sehr großem n angegeben. Die Länge b entspricht etwa dem Radius r und beträgt hier 50 mm ± 0,5 mm bei P = 98%. Die Länge a wurde in insgesamt 10 Messungen ermittelt. Es liegen die in Tabelle 6.1 dargestellten Einzelmesswerte vor.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
a / mm	100,02	100,01	99,98	99,97	100,01	100,00	99,98	99,99	100,02	99,99

Tabelle 6.1: Messwerte der Länge a

Die folgenden Werte für die Messung mittels 3-Punkt-Antastung sind bekannt:

Der Abstand L wurde in 10 Messungen zu L = 25 mm ± 0,004 mm bei P = 95% ermittelt. Die Höhe h wird vom Messgerät ausgegeben und beträgt h = 1,588 mm ± 0,002 mm bei P = 98%.

a) Untersuchen sie mittels einer Abweichungsrechnung, unter Verwendung welches Messmittels sich der Radius des Zylinders zuverlässiger – also mit geringerer Unsicherheit – messen lässt! Geben Sie für beide Messmethoden das vollständige Messergebnis des Radius r einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98% an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 7: t-Test für Erwartungswert

Auf dem Münchner Oktoberfest wird Wiesnwirt Alois verdächtigt, die Maßkrüge (Nennmaß = 1000 ml) nicht ordnungsgemäß auszuschenken. Daher wird von einem Mitarbeiter des Ordnungsamtes anhand von 20 Maßkrügen eine Stichprobe der Füllmenge V durchgeführt. Es ergeben sich die in Tabelle 7.1 zusammen gefassten Messwerte.

i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
V / ml	995	990	955	1005	980	975	1010	985	1000	980
i	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
V / ml	985	1020	965	1005	970	985	1000	1010	985	1000

Tabelle 7.1: Messwerte der Füllmenge V

Aus langjähriger Erfahrung setzt der Mitarbeiter des Ordnungsamtes voraus, dass die Inhalte der Maßkrüge normalverteilt sind.

a) Nach dem Grundsatz „im Zweifel für den Beklagten" wird folgende Hypothese formuliert: „Wirt Alois schenkt im Mittel mindestens 1000 ml je Maß aus." Ist anhand dieser Stichprobe die Aussage mit einer statistischen Sicherheit von 95% gerechtfertigt?

Der Sohn von Wirt Alois studiert Wirtschaftsmathematik und möchte zur Ertragsoptimierung im Bierzelt beitragen. Von seinem Vater erfährt er, dass

- das Ordnungsamt bei Überprüfungen stets eine Stichproben um Umfang n = 20 nimmt und
- ein Bußgeld fällig wird, wenn mit statistischer Sicherheit von 97,5% der Erwartungswert nicht bei 1000 ml oder darüber liegt.

Seine eigene Beobachtung zeigt ihm, dass selbst bei routinierten Zapfern die Standardabweichung stets ≥20 ml ist.

Aus diesen Daten berechnet er seinem Vater die mittlere Füllmenge je Maßkrug, bei der dieser weniger ausschenkt als gefordert, aber gerade noch einer Strafe entgeht.

b) Wie groß ist dabei im Mittel die Fehlmenge je Maßkrug?

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 8: t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Zwei CNC-Drehmaschinen fertigen Wellen mit einem Solldurchmesser von D_0 = 12,54 mm. Aus der laufenden Produktion wurde für beide Maschinen jeweils eine Stichprobe vom Umfang n = 20 entnommen. Dabei ergaben sich die in Tabelle 8.1 und Tabelle 8.2 eingetragenen Einzelmesswerte.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D / mm	12,85	12,47	12,97	12,6	12,05	13,02	12,40	12,77	12,57	12,26
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D / mm	12,14	12,90	12,54	12,62	12,94	12,68	13,05	13,01	12,85	12,91

Tabelle 8.1: Messreihe Drehmaschine 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D / mm	12,69	12,24	12,83	12,39	11,75	12,88	12,16	12,6	12,36	12,01
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D / mm	11,86	12,75	12,33	12,43	12,79	12,49	12,91	12,88	12,69	12,76

Tabelle 8.2: Messreihe Drehmaschine 2

a) Überprüfen Sie, ob Drehmaschine 2 statistisch signifikant (Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}025$) kleinere Wellendurchmesser fertigt, als Drehmaschine 1? Geben Sie hierbei explizit an, welche Art von t-Test durchzuführen ist und wie die Hypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 lauten.

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 9: t-Test für verbundene Stichproben

Es soll die Wirkung zweier Schlafmittel miteinander vergleichen werden. Dazu wurde die schlafverlängernde Wirkung ΔT (in Stunden) der Schlafmittel A und B an n = 10 Probanden in zwei aufeinanderfolgenden Nächten untersucht. Die Urliste in Tabelle 9.1 enthält die Messwerte der n = 10 Testpersonen.

Testperson i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔT_A / h	1,9	0,8	1,1	0,1	-0,1	4,4	5,5	1,6	4,6	3,4
ΔT_B / h	0,7	-1,6	-0,2	-1,2	-0,1	3,4	3,7	0,8	0,0	2,0

Tabelle 9.1: Messreihe Drehmaschine 1

Es soll geprüft werden, ob sich die schlafverlängernde Wirkung der beiden Schlafmittel auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ unterscheidet.

a) Welcher Test ist geeignet, das Problem zu lösen?

b) Müssen wir eine einseitige oder zweiseitige Hypothese stellen? Warum?

c) Prüfen Sie die Hypothese durch Anwendung des Tests!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 10: Lineare Regression

Die Kapazität handelsüblicher Kondensatoren ist in nicht unerheblichem Maße von der Umgebungstemperatur T abhängig. Die tatsächliche Kapazität C ergibt sich aus der Nennkapazität C_0 bei $T_0 = 20°C$, dem Empfindlichkeitskoeffizienten a_c und der Umgebungstemperatur T gemäß folgendem Zusammenhang:

$$C = C_0 \cdot \left(1 + a_c \cdot (T - T_0)\right)$$

Um diesen Effekt bei der Auslegung von Schaltungen in angemessener Weise berücksichtigen zu können, soll nachfolgend der Empfindlichkeitskoeffizient a_c für eine bestimmte Kondensatorbauart experimentell ermittelt werden. Hierzu wird eine Messreihe vom Umfang $n = 8$ durchgeführt, bei welcher in einem geregelten Wärmeschrank bestimmte Temperaturen angefahren und die sich einstellenden Kapazitäten C gemessen werden. Hierbei ergeben sich die in Tabelle 10.1 aufgeführten Einzelmesswerte.

T / °C	0	5	10	15	20	25	30	35
C / nF	71,34	70,51	69,72	68,84	68,05	67,19	66,34	65,42

Tabelle 10.1: Messreihe Drehmaschine 1

Der untersuchte Kondensator weist eine Nennkapazität von $C_0 = 68$ nF auf. (Anm.: Dieser Wert kann als exakt angesehen werden.)

a) Bestimmen Sie mittels linearer Regression den Empfindlichkeitskoeffizienten a_c des untersuchten Kondensators einschließlich der wahrscheinlichen Abweichungsgrenzen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$!

b) Zum Aufbau eines Schwingkreises wird ein baugleicher Kondensator (identische Temperaturabhängigkeit wie unter Aufgabenteil a) ermittelt) mit einer Nennkapazität von $C_0 = 47$ nF bei $T_0 = 20°C$ (Anm.: Dieser Wert kann als exakt angesehen werden) in ein temperaturstabilisiertes Gehäuse eingebaut, in welchem sich nach längerem Betrieb eine Temperatur von $T = 27,5°C$ einstellt. Geben Sie die unter diesen Bedingungen resultierende Kapazität C des Kondensators einschließlich des zugehörigen Vertrauensbereichs für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 98 % an!

Hinweis: Für alle Messgrößen kann eine Normalverteilung vorausgesetzt werden!

Aufgabe 11: Chi²-Test auf Normalverteilung

Aus einer laufenden Fertigung für Rundstäbe wird eine Stichprobe vom Umfang n = 125 entnommen, um die Länge der Rundstäbe zu ermitteln.

Die 125 Einzelmesswerte wurden zu dem Histogramm in Tabelle 11.1 zusammengefasst.

Klasse, x / mm	Häufigkeit
$221{,}0 \leq x < 221{,}1$	1
$221{,}1 \leq x < 221{,}2$	1
$221{,}2 \leq x < 221{,}3$	2
$221{,}3 \leq x < 221{,}4$	9
$221{,}4 \leq x < 221{,}5$	15
$221{,}5 \leq x < 221{,}6$	22
$221{,}6 \leq x < 221{,}7$	30
$221{,}7 \leq x < 221{,}8$	27
$221{,}8 \leq x < 221{,}9$	9
$221{,}9 \leq x < 222{,}0$	6
$222{,}0 \leq x$	3

Tabelle 11.1: Histogramm der Länge von n = 125 Rundstäben

Der Mittelwert der Stichprobe beträgt: $\overline{x} = 221{,}63$ mm

Die Streuung der Stichprobe beträgt: $S = 0{,}183$ mm

a) Prüfen Sie, ob die Länge der gefertigten Rundstäbe mit einer statistischen Sicherheit von 95% normalverteilt ist!

Aufgabe 12: Chi²-Test auf Gleichverteilung

Ein sogenannter „fairer Würfel" zeichnet sich dadurch aus, dass alle Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit geworfen werden. Da Sie in der letzten Zeit beim „Mensch-Ärgere-Dich-Nicht"-Spiel etwas das Glück verlassen hat, möchten Sie überprüfen, ob ihr sechsseitiger Würfel denn auch ein „fairer Würfel" ist. Hierzu führen Sie 300 Würfe aus und erhalten die in Tabelle 12.1 zusammen gefassten Häufigkeiten für die Augenzahlen 1 bis 6.

Augenzahl	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Häufigkeit	42	51	56	48	52	51

Tabelle 12.1: Gewürfelte Häufigkeiten der Augenzahlen 1 bis 6

a) Untersuchen Sie mittels eines geeigneten statistischen Tests, ob der Würfel auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ als „fair" bezeichnet werden kann!

Erläuterungen zum Antwort-Wahl-Verfahren

Die aktuellen Klausuren weisen zwei Teile, A und B, nach dem Antwort-Wahl-Verfahren auf:

- Der Teil A des Antwort-Wahl-Verfahrens fällt inhaltlich in den Bereich der Berechnungsverfahren zur statistischen Messdatenauswertung (Kapitel 2 des Skripts), der in früheren Prüfungen von Rechenaufgaben abgedeckt wurde. Hier sind, wie auch bei den klassischen Rechenaufgaben, bestimmte Berechnungen nach in der Vorlesung und Übung behandelten Verfahren durchzuführen. Die Beantwortung der Fragen erfolgt jedoch in Form der Auswahl einer der zur Wahl stehenden Antwortalternativen.
- Der Teil B deckt inhaltlich ebenso wie die klassischen Kurzfragen den gesamten Vorlesungsstoff ab, wobei den Schwerpunkt die Kapitel 1 und 3 bilden. Die im Teil B behandelten Fragestellungen decken Aspekte ab, die in früheren Klausuren hauptsächlich in Form von Kurzfragen behandelt wurden.

Bewertung von Fragen nach dem Antwort-Wahl-Verfahren

Formal sind zwei Typen von Fragestellungen zu unterscheiden: Solche vom Typ Einfachwahl und solche vom Typ Mehrfachwahl. Bei jeder Frage ist angegeben, von welchem Typ sie ist.

Bei Fragen vom Typ Einfachwahl ist stets genau eine der angebotenen Antwortalternativen korrekt. Die Bewertung ist daher entsprechend einfach: Ist genau die eine korrekte Antwortalternative markiert, wird die volle Punktzahl vergeben. Ist dies nicht der Fall, weil entweder keine, eine falsche oder mehrere Antwortalternativen markiert wurden, werden für die Aufgabe keine Punkte vergeben.

Bei Fragen vom Typ Mehrfachwahl können eine, mehrere oder alle der gegebenen Antwortalternativen zutreffend sein. Gemäß der jeweiligen Fragestellung sind alle zutreffenden Antwortalternativen vom Kandidaten anzukreuzen, alle <u>nicht</u> zutreffende Antwortalternativen sind <u>nicht</u> anzukreuzen.

Als korrekt bearbeitet gilt eine Antwortalternative demnach in zwei Fällen:

- Fall 1: Die Antwortalternative ist zutreffend und wurde vom Kandidaten angekreuzt.
- Fall 2: Die Antwortalternative ist <u>nicht</u> zutreffend und wurde vom Kandidaten <u>nicht</u> angekreuzt.

Als fehlerhaft bearbeitet gilt eine Antwortalternative entsprechend in folgenden Fällen:

- Fall 1: Die Antwortalternative ist zutreffend, wurde vom Kandidaten jedoch <u>nicht</u> angekreuzt.
- Fall 2: Die Antwortalternative ist <u>nicht</u> zutreffend, wurde vom Kandidaten jedoch angekreuzt.

Auf jede Aufgabe entfällt eine bestimmt Anzahl von Punkten (Höchstpunktzahl). Wurden alle Antwortalternativen korrekt beantwortet, wird die Höchstpunktzahl vergeben. Wurden <u>nicht</u>

alle Antwortalternativen korrekt beantwortet, werden gemäß folgendem Schlüssel anteilig Punkte vergeben:

(Punktzahl) = (Höchstpunktzahl)*((Anzahl korrekt beantworteter Antwortalternativen) – (Anzahl nicht korrekt beantworteter Antwortalternativen))/(Anzahl aller Antwortalternativen)

Ergibt sich hiernach rechnerisch eine Punktzahl kleiner als null Punkte, wird die Frage mit null Punkten bewertet. Es werden also keine negativen Punkte vergeben.

Beispiele:

Eine Frage biete fünf Antwortalternativen A bis E, wovon zwei (A und C) zutreffend und drei (B, D und E) nicht zutreffend sind. Maximal sind bei der Frage 2,5 Punkte zu erreichen.

Bsp. 1: Der Kandidat kreuzt A und C an, B, D und E kreuzt er nicht an. Damit sind alle Antwortalternativen korrekt bearbeitet. Der Kandidat erhält die vollen 2,5 Punkte.

Bsp. 2: Der Kandidat kreuzt A, C und E an, B und D kreuzt er nicht an. Damit sind die Antwortalternativen A, B, C und D korrekt bearbeitet. Die Antwortalternative E ist nicht korrekt bearbeitet. Die Punktzahl ergibt sich gemäß obiger Formel somit zu:

Punktzahl = 2,5*(4 – 1)/5 = 1,5

Der Kandidat erhält 1,5 Punkte.

Bsp. 3: Der Kandidat kreuzt A und D an, B, C und E kreuzt er nicht an. Damit sind die Antwortalternativen A, B und E korrekt bearbeitet. Die Antwortalternativen C und D sind nicht korrekt bearbeitet. Die Punktzahl ergibt sich gemäß obiger Formel somit zu:

Punktzahl = 2,5*(3 – 2)/5 = 0,5

Der Kandidat erhält 0,5 Punkte.

Bsp. 4: Der Kandidat kreuzt alle Antwortalternativen an. Damit sind die Antwortalternativen A und C korrekt bearbeitet. Die Antwortalternativen B, D und E sind nicht korrekt bearbeitet. Die Punktzahl ergibt sich gemäß obiger Formel somit zu:

Punktzahl = 2,5*(2 – 3)/5 = –0,5

Der rechnerische Wert ist kleiner Null. Der Kandidat erhält daher 0 Punkte.

Antwort-Wahl-Verfahren: Teil A

1. Bei einem Hersteller von Drosselblenden für die Durchflussmessung wird im Rahmen der Qualitätssicherung der Durchmesser der kreisförmigen Blendenöffnungen überwacht. Hierzu wird aus der laufenden Fertigung eine Stichprobe vom Umfang $n = 10$ entnommen und der Durchmesser D der Drosselöffnungen ermittelt. Aus der Stichprobe ergibt sich ein Mittelwert des Durchmessers von $\overline{D} = 19{,}9864\ \text{mm}$ und eine Streuung von $S_D = 0{,}0164\ \text{mm}$. Die Standardabweichung σ sei unbekannt.

1.1. Das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Drosselblendendurchmessers D für eine Aussagewahrscheinlichkeit von P = 95% beträgt für diesen Fall gerundet:

a) D = 19,9864 mm ± 0,0094 mm; P = 95% ☐
b) D = 19,9864 mm ± 0,0095 mm; P = 95% ☐
c) D = 19,9864 mm ± 0,0102 mm; P = 95% ☐
d) D = 19,9864 mm ± 0,0116 mm; P = 95% ☐
e) D = 19,9864 mm ± 0,0117 mm; P = 95% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

1.2. Der minimal erforderliche Stichprobenumfang n, um bei einer Aussagewahrscheinlichkeit von $P = 90\%$ das Konfidenzintervall des Erwartungswertes des Durchmessers auf maximal ± 0,007 mm abschätzen zu können, beträgt:

a) n = 15 ☐
b) n = 16 ☐
c) n = 17 ☐
d) n = 24 ☐
e) n = 41 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

1.3. Gehen Sie davon aus, dass Mittelwert und Streuung obiger Stichprobe mit dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Grundgesamtheit übereinstimmen. Wie viel Prozent aller Drosselblenden weisen dann gerundet einen Durchmesser im Bereich 19,98 mm ≤ D ≤ 20,02 mm auf?

a) 34,82% ☐
b) 36,84% ☐
c) 63,16% ☐
d) 77,75% ☐
e) 97,98% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

2. Sie möchten die Wirksamkeit zweier Nahrungsergänzungsmittel zum Muskelaufbau auf ihre Wirksamkeit hin überprüfen. Hierzu lassen Sie n = 20 Probanden trainingsbegleitend für die Dauer von vier Wochen Wirkstoff A einnehmen. Zwei Monate später lassen Sie dieselben n = 20 Probanden trainingsbegleitend wiederum für die Dauer von vier Wochen Wirkstoff B einnehmen. Aus Messungen jeweils zu Beginn und Ende der beiden vierwöchigen Untersuchungseinheiten bestimmen Sie jeweils den Gewinn an Muskelmasse in beiden Trainingszeiträumen. Sie möchten die Frage beantworten, ob sich die beiden Wirkstoffe in Ihrer Wirkung unterscheiden.

2.1. Welcher statistische Test ist geeignet, die Frage zu beantworten?

a) lineare Regression ☐
b) t-Test für Erwartungswert ☐
c) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben ☐
d) t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte bei verbundenen Stichproben ☐
e) Chi-Quadrat-Test ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

2.2. Welche Alternativhypothese ist für den Test zu wählen?

a) einseitige Alternativhypothese ☐
b) zweiseitige Alternativhypothese ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3. Anhand zweier unabhängiger Stichproben möchten Sie einen t-Test für den Vergleich zweier Erwartungswerte durchführen. Aus den Stichproben, die jeweils einen Umfang von n = 20 aufweisen, haben Sie Mittelwerte und Streuungen der Größen x und y ermittelt zu $\overline{x} = 39{,}97$ kg, $S_x = 0{,}49$ kg, $\overline{y} = 40{,}06$ kg, $S_x = 0{,}47$ kg.

3.1. Die Testgröße t_0 beträgt in diesem Fall gerundet:

a) –2,905 ☐
b) –0,838 ☐
c) –0,593 ☐
d) +0,593 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

3.2. Der für die Bestimmung des kritischen Wertes benötigte Freiheitsgrad s beträgt bei diesem Test:

a) 18 ☐
b) 19 ☐
c) 20 ☐
d) 38 ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4. Sie möchten mittels eines t-Tests für verbundene Stichproben die Wirksamkeit zweier Medikamente A und B zur Gewichtsreduktion vergleichen. Der Stichprobenumfang beträgt $n = 30$. Ihre Nullhypothese lautet, dass die Wirkung der Medikamente sich nicht unterscheidet ($\mu_d = 0$). Sie wählen eine zweiseitige Alternativhypothese ($\mu_d \neq 0$). Sie wählen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}01$. Die von Ihnen berechnete Testgröße beträgt $t_0 = -2{,}57$.

4.1. Geben Sie an, ob die Nullhypothese abgelehnt oder <u>nicht</u> abgelehnt werden muss!

a) Nullhypothese wird <u>nicht</u> abgelehnt ☐
b) Nullhypothese wird abgelehnt ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

4.2. Angenommen, die Nullhypothese würde <u>nicht</u> abgelehnt. Welche Aussage in Bezug auf die Wirksamkeit der untersuchten Medikamente A und B wäre dann am zutreffendsten?

Die Wirkung der Medikamente A und B

a) unterscheidet sich wahrscheinlich. ☐
b) unterscheidet sich definitiv. ☐
c) unterscheidet sich wahrscheinlich <u>nicht</u>. ☐
d) unterscheidet sich definitiv <u>nicht</u>. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

<u>Antwort-Wahl-Verfahren: Teil B</u>

5. Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um <u>extensive</u> Größen handelt!

a) Masse ☐
b) Wärmekapazität ☐
c) Dichte ☐
d) elektrische Ladung ☐
e) Brechungsindex ☐
f) Druck ☐
g) dynamische Viskosität ☐
h) Entropie ☐

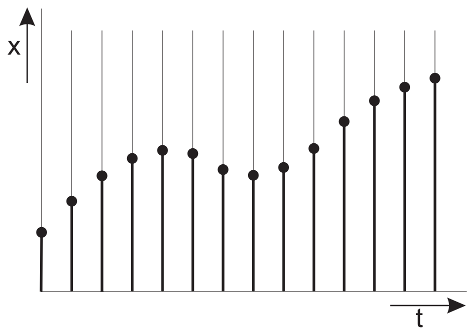
(Fragetyp Mehrfachwahl)

6. Geben Sie an, welche der folgenden Gleichungen korrekt sind!

a) 10^{-6} kg + 1 µg = 1,001 mg ☐
b) 1 GW = 10^3 MW ☐
c) 1 nm = 10^{-6} mm ☐
d) 100 hPa + 1 MPa = 1010 kPa ☐
e) 10 cm – 1 mm = $9{,}9 \cdot 10^{-1}$ m ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

7. Geben Sie an, von welcher Art das nachfolgend abgebildete Signal hinsichtlich seines Verhaltens in Zeit- sowie in Amplitudenrichtung ist!



a) amplitudenkontinuierlich und zeitkontinuierlich ☐
b) amplitudendiskret und zeitkontinuierlich ☐
c) amplitudenkontinuierlich und zeitdiskret ☐
d) amplitudendiskret und zeitdiskret ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

8. Ein lineares System 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T und dem Übertragungsfaktor K = 1 werde aus dem Beharrungszustand heraus zum Zeitpunkt t = 0 mit einer sprungförmigen Änderung der Eingangsspannung von 0 V auf 10 V beaufschlagt. Welche Spannung wird nach der Zeitdauer t = T am Ausgang etwa anliegen?

a) 5 V ☐
b) 6,3 V ☐
c) 7,5 V ☐
d) 9 V ☐
e) 9,9 V ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

9. Geben Sie an, wie viel Prozent der Elemente einer Verteilung zusammengenommen unterhalb des ersten Quartils (Q1) oder oberhalb des dritten Quartils (Q3) liegen!

a) 25% ☐
b) 40% ☐
c) 50% ☐
d) 60% ☐
e) 75% ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

10. Sie führen ein Zufallsexperiment durch, bei welchem Sie aus einem mit roten und grünen Kugeln gefüllten Gefäß zufällig n Kugeln nacheinander <u>ohne</u> Zurücklegen entnehmen. Durch welche statistische Verteilung lässt sich die Wahrscheinlichkeit beschreiben, mit der bei diesem Versuch eine bestimmte Anzahl roter Kugeln gezogen wird?

a) Binomialverteilung ☐
b) Normalverteilung ☐
c) Gleichverteilung ☐
d) Poissonverteilung ☐
e) Hypergeometrische Verteilung ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

11. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über statistische Tests korrekt sind!

a) Wird für einen statistischen Test ein Signifikanzniveau von 1% gewählt, bedeutet dies, dass die getroffene Entscheidung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% korrekt ist. ☐
b) Als Fehlentscheidung 2. Art bezeichnet man den Fall, dass als Ergebnis eines statistischen Tests die Nullhypothese H_0 <u>nicht</u> abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich <u>nicht</u> zutrifft. ☐
c) Die Güte eines statistischen Tests lässt sich durch Vergrößerung des zugrunde gelegten Stichprobenumfangs erhöhen. ☐
d) In experimentellen Wissenschaften können statistische Tests dazu genutzt werden, Hypothesen zu beweisen oder zu widerlegen. ☐
e) Eine Messreihe, die zur Bildung einer Hypothese verwendet wurde, darf <u>nicht</u> für einen Test dieser Hypothese genutzt werden. ☐

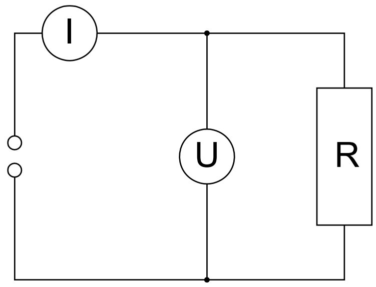
(Fragetyp Mehrfachwahl)

12. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen hinsichtlich der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Abweichungsquadrate zutreffend sind!

a) Die bei der linearen Regression berechnete Gerade geht immer durch den Schwerpunkt der Punkte $(\overline{x}, \overline{y})$. ☐
b) Bei der linearen Regression wird durch eine Menge von Wertepaaren (x, y) eine Gerade derart gelegt, dass die Summe der Abweichungen minimal wird. ☐
c) Eine Voraussetzung für die sinnvolle Anwendbarkeit der linearen Regression stellt dar, dass die Varianz der Residuen unabhängig vom x-Wert ist. ☐
d) Mit der linearen Regression kann nachgewiesen werden, dass eine beobachtete statistische Korrelation zweier Größen x und y auf einen kausalen Zusammenhang dieser beiden Größen zurückzuführen ist. ☐
e) Die lineare Regression liefert rechnerisch nur dann ein Ergebnis, wenn die Eingangsdaten tatsächlich näherungsweise einen linearen Zusammenhang aufweisen. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

13. Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen über die nachfolgend abgebildete Schaltung zutreffend sind!



a) Bei der Schaltung handelt es sich um eine Stromfehlerschaltung zur indirekten Widerstandsmessung. ☐

b) Die indirekte Widerstandsmessung basiert auf der Anwendung des Coulombschen Gesetzes. ☐

c) Die Schaltung ist für die Messung großer Widerstände besser geeignet als für die Messung kleiner Widerstände. ☐

d) Die systematische Messabweichung der Schaltung würde zu Null werden, wenn das verwendete Strommessgerät einen idealen Innenwiderstand von 0 Ohm aufweisen würde. ☐

e) Die systematische Messabweichung der Schaltung könnte dadurch reduziert werden, dass das Spannungsmessgerät mittels einer Vierleiterschaltung angeschlossen wird. ☐

(Fragetyp Mehrfachwahl)

14. Bei dem Abtasttheorem nach Shannon handelt es sich hinsichtlich der verlustfreien Rekonstruktion der digitalisierten Daten um ein

a) hinreichendes und notwendiges Kriterium. ☐

b) hinreichendes aber <u>nicht</u> notwendiges Kriterium. ☐

c) <u>nicht</u> hinreichendes aber notwendiges Kriterium. ☐

d) <u>nicht</u> hinreichendes und <u>nicht</u> notwendiges Kriterium. ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

15. Für eine Anwendung in der Prozessüberwachung sollen Sie einen A/D-Umsetzer auswählen. Von diesem wird eine möglichst hohe Abtastrate gefordert. Die benötigte Auflösung beträgt 6 Bit. Zur Auswahl stehen A/D-Umsetzer nach dem Zählverfahren, dem Wägeverfahren und dem Parallelverfahren. Geben Sie an, welches dieser drei Grundprinzipien in Anbetracht der bestehenden Anforderungen am geeignetsten ist!

a) Zählverfahren ☐

b) Wägeverfahren ☐

c) Parallelverfahren ☐

(Fragetyp Einfachwahl)

Kurzfragensammlung 1: SI-Einheiten, Messverfahren, Kalibrierung

- Definitionen von SI-Einheiten: Sind die folgenden Aussagen wahr?

  a) Einheit der Masse ist das verkörperte Urkilogramm in Paris
  b) Einheit der Länge ist das verkörperte Urmeter in Paris

  ⇒ *zu a) ja*
  zu b) nein

- Die Einheiten von Länge (m) und Zeit (s) im SI-System sind redundant. Es würde genügen, entweder die Länge oder die Zeit zu definieren.

  ⇒ *ja*

- Welche der folgenden Größen sind keine Grundgrößen des SI-Systems?

  Drehmoment, Leistung, Zeit, Fläche, magnetischer Fluss, elektrische Spannung, elektrische Stromstärke, Stoffmenge, Winkel, Lichtgeschwindigkeit

  ⇒ *Drehmoment, Leistung, Fläche, magnetischer Fluss, elektrische Spannung, Winkel, Lichtgeschwindigkeit*

- Welche der folgenden Größen ist eine Grundgröße des SI-Systems (Mehrfachnennungen möglich)?

  Drehmoment, Gewicht, Stromstärke, elektrische Spannung, Wärmemenge, Zeit, Geschwindigkeit

  ⇒ *Stromstärke, Zeit*

- Erläutern Sie den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen! Nennen Sie jeweils eine intensive und eine extensive Grundgröße des SI-Systems!

  ⇒ *Der Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen besteht darin, dass intensive Größen von der Stoffmenge des Systems unabhängig sind während der Wert extensiver Größen sich bei Teilung des Systems ebenfalls teilt.*

  intensive Grundgröße des SI-Systems: Temperatur (die einzige intensive Grundgröße)

  extensive Grundgröße des SI-Systems: Länge (oder: Masse, Zeit, Stromstärke, Stoffmenge, Lichtstärke)

- Nennen Sie alle Grundgrößen des SI-Systems, bei denen es sich um extensive Größen handelt!

  ⇒ *Masse, Länge, Zeit, elektrische Stromstärke, Stoffmenge, Lichtstärke*

- Geben Sie an, bei welchen der folgenden Zustandsgrößen es sich um intensive Größen handelt!

  Masse, Temperatur, Dichte, Energie, spezifische Wärmekapazität, Stoffmenge, Druck

  ⇒ *Temperatur, Dichte, spezifische Wärmekapazität, Druck*

- Zwei Behälter mit je 1 Liter Wasser mit der Temperatur 30°C bzw. 40°C werden in einen dritten Behälter entleert. Wie hoch ist die Mischungstemperatur (Einfluss der Behältertemperatur wird vernachlässigt)? Warum ist die Mischungstemperatur nicht 70°C?

  ⇒ *35°C, die Temperatur ist eine intensive Größe*

- Sie wollen eine Waage mit Hilfe eines Satzes von Massestücken kalibrieren. Müssen die Massestücke geeicht sein?

  ⇒ *nein, die Massestücke müssen lediglich kalibriert sein*

- Bei einer Personenwaage wird eine Nichtlinearität festgestellt. Es wird eine Kalibrierung durchgeführt. Ist danach die Abhängigkeit der Skalenanzeige von der tatsächlichen Masse linear?

  ⇒ *nein, denn das Verhalten der Waage wurde nicht verändert*

- Ein Thermometer zeige bei einer tatsächlichen Temperatur von 42°C den Wert 43,5°C an. Das Gerät wird kalibriert. Geben Sie an, welchen Messwert es nach der Kalibrierung bei einer tatsächlichen Temperatur von 42°C anzeigt!

  ⇒ *43,5°C, das Verhalten des Thermometers wurde nicht verändert*

- Erläutern Sie je einen Vor- und Nachteil einer Kompensationsmessmethode gegenüber einer Ausschlagmessmethode!

  ⇒ *Vorteil: nahezu rückwirkungsfrei, Nachteil: langsamer*

- Erläutern sie die drei nachfolgend genannten Begriffe und nennen Sie zu jedem davon ein Beispiel!

  a) direkte Messmethode im engeren Sinne
  b) direkte Messmethode im erweiterten Sinne
  c) indirekte Messmethode

  ⇒ *zu a) Direkte Messmethoden im engeren Sinne: Der gesuchte Messwert einer Messgröße wird durch unmittelbaren Vergleich mit einem Normal derselben Messgröße gewonnen, z.B. Längenmessung mit Maßstab, Wägung durch Vergleich mit kalibrierten Gewichten,...*

  ⇒ *zu b) Direkte Messmethoden im erweiterten Sinne: Der Messwert wird direkt auf einer kalibrierbaren Anzeige angezeigt, z.B. Stromstärkemessung mit Drehspulinstrument, Temperaturmessung mit Flüssigkeitsthermometer,...*

  ⇒ *zu c) Indirekte Messmethoden: Der gesuchte Messwert wird auf andersartige Messgrößen zurückgeführt und muss aus diesen unter Verwendung bekannter physikalischer Prinzipien ermittelt werden, z.B. Druckmessung aus Kraft- und Flächenmessung,...*

- Auf einer zukünftigen Marsmission soll den Astronauten eine Waage mitgegeben werden, um vor Ort die Masse von für den Transport zur Erde bestimmten Gesteinsproben ermitteln zu können. Im Auftrag der ESA sollen Sie analysieren, welche Grundprinzipien von Waagen für diesen Zweck einsetzbar sind. Ihre Großmutter schlägt vor, hierfür eine Balkenwaage und einen Satz kalibrierter Massestücke einzusetzen, wie sie dies noch aus ihrer Jugend vom Wochenmarkt kennt.

  a) Geben Sie an, ob eine derartige Wägeanordnung auf dem Mars bei sachgemäßer Verwendung eine präzise Massebestimmung erwarten lässt! Begründen Sie Ihre Antwort!

  ⇒ *Eine Balkenwaage und ein Satz kalibrierter Massestücke sind auch für die Messung auf dem Mars geeignet, da es sich um ein Kompensationsmessverfahren handelt und sowohl das Wägegut als auch die Massestücke von der herrschenden Schwerkraft (die sich von der auf der Erde unterscheidet) betroffen sind.*

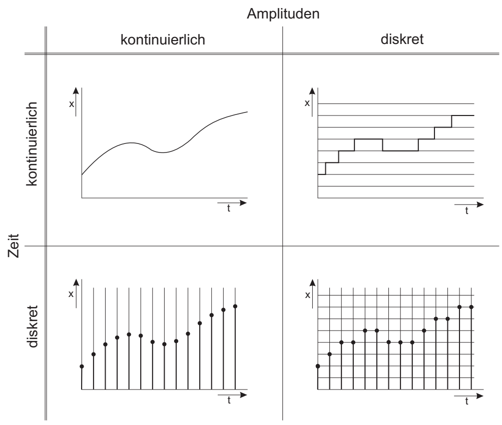
- Erläutern Sie die Begriffspaare zeitkontinuierlich / zeitdiskret sowie amplitudenkontinuierlich / amplitudendiskret und skizzieren Sie die vier somit möglichen Signalarten!

  ⇒ *Zeitkontinuierlich: Zu jedem Zeitpunkt hat das Signal einen definierten Wert.*

  ⇒ *Zeitdiskret: Das Signal hat nur zu bestimmten Zeitpunkten einen definierten Wert.*

  ⇒ *Amplitudenkontinuierlich: Das Signal kann (innerhalb eines bestimmten Wertebereichs) beliebige Zwischenwerte annehmen.*

  ⇒ *Amplitudendiskret: Das Signal kann nur bestimmte (quantisierte) Werte annehmen.*



- Ein Messsystem verhalte sich wie ein lineares System 2. Ordnung. Am Eingang liege eine Sprungfunktion an. Wovon hängt es ab, ob das Messsystem ein Überschwingen zeigt?

  ⇒ *von der Dämpfung*

- Woran kann man die Sprungantwort eines linearen Systems 1. Ordnung sicher von der eines linearen Systems 2. Ordnung unterscheiden?

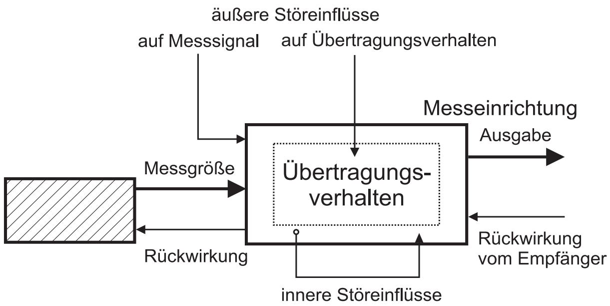
  ⇒ *lineare Systeme 1. Ordnung haben eine Anfangssteigung > 0, bei linearen Systemen 2. Ordnung ist die Anfangssteigung = 0*

Kurzfragensammlung 2: Messabweichung, elektrische Messtechnik

- Erläutern Sie den Begriff Repräsentativitätsfehler und nennen Sie ein Beispiel!

  ⇒ *Die tatsächlich gemessene Größe entspricht (z.B. bedingt durch eine ungeeignete Versuchsanordnung) nicht der Größe, die man eigentlich messen will.*
  Beispiel: Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit eines Flusses mittels eines in Ufernähe befestigten Strömungssensors

- Skizzieren Sie das allgemeine Blockschaltbild eines fehlerbehafteten Messsystems und benennen Sie die verschiedenen Störeinflüsse!



- Die Rückwirkung des Messvorgangs auf die Messgröße lässt sich dadurch minimieren, dass man auf hinreichend großen Energieaustausch zwischen Messobjekt und Aufnehmer achtet.

  ⇒ *nein, ein größerer Energieaustausch erhöht die Messabweichung*

- Die Wechselwirkung zwischen Messeinrichtung und Messobjekt führt stets zu Messabweichungen. Wir haben drei Möglichkeiten diskutiert, mit der Abweichung umzugehen. Welche sind das?

  ⇒ *vernachlässigen der Abweichung, wenn die geforderte Toleranz das zulässt;*
  rechnerische Abweichungskorrektur;
  ändern der Messeinrichtung zur Kompensation der Abweichung

- Geben Sie die verschiedenen Störungsarten an, die von außen auf ein Messsystem einwirken können.

  ⇒ *deformierende äußere Störung, superponierende äußere Störung*

- Bei der Wägung von Tiefkühlgemüse mit einer Federwaage kondensiert Luftfeuchtigkeit an den Verpackungen. Außerdem kühlt sich die Feder ab und dadurch verändert sich die Federkonstante der Waage. Welche Arten von Störung der Messung liegen vor?

  ⇒ *superponierende äußere Störung (Kondensation),*
  deformierende äußere Störung (Abkühlung der Feder)

- Beim Versuch, die Dicke einer Schaumstoffmatte mit einer Bügelmessschraube zu messen, wird die Matte aufgrund der Messkraft zusammengedrückt und es resultiert eine Messabweichung. Ist dies ein Beispiel für eine das Übertragungsverhalten deformierende äußere Störung?

  ⇒ *nein, es handelt sich um eine Rückwirkung*

- Bei einer Kompensationswaage wird mit einem Elektromagneten eine Kraft auf die Waagschale ausgeübt, die entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft des Massenstückes ist. Die dazu erforderliche Stromstärke ist ein Maß für die Kraft. Man stellt fest, dass das Messergebnis vom herrschenden Luftdruck abhängt.

  a) Was ist die Ursache?

  b) Um welche Art Störeinfluss handelt es sich?

  ⇒ *zu a) der Auftrieb in Luft;*
  zu b) superponierender äußerer Störeinfluss

- Ist die Aussage „Die Messunsicherheit kann beliebig klein gemacht werden, wenn man genügend viele Wiederholungen der Messung durchführt“ richtig? Begründen Sie Ihre Aussage!

  ⇒ *nein, durch wiederholte Messung kann nur die zufällige Abweichung reduziert werden, nicht jedoch die systematische Abweichung*

- Formulieren Sie das Abtasttheorem nach Shannon!

  ⇒ *Wird ein bandbegrenztes Signal mit einer äquidistanten Folge von Stützstellen abgetastet, so ist die Rekonstruktion des Signals ohne Informationsverlust möglich, wenn die Abtastfrequenz größer als das Doppelte der maximalen Signalfrequenz ist.*

- Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist, dass es sich bei dem Abtasttheorem nach Shannon um eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung handelt!

  ⇒ *Hinreichende Bedingung: Wenn das Abtasttheorem eingehalten wird, wird bereits alleine dadurch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals ermöglicht.*
  Nicht notwendige Bedingung: Auch wenn das Abtasttheorem nicht eingehalten wird, ist prinzipiell noch eine verlustfreie Rekonstruktion des Ursprungssignals möglich, beispielsweise unter Einbeziehung von Zusatzinformationen.

- Ein Rechtecksignal mit einer Periodendauer von 5 ms werde mit einer Abtastrate von 1 kHz digitalisiert. Geben Sie an, ob in diesem Fall das Abtasttheorem nach Shannon erfüllt ist! Begründen Sie Ihre Antwort!

  ⇒ *nein, ein Rechtecksignal ist nicht bandbegrenzt, die Einhaltung des Abtasttheorems ist daher nicht möglich*

- Wie viele Takte benötigt ein A/D-Umsetzer nach dem single-slope-Verfahren für die Digitalisierung einer Messgröße mit 8 Bit Auflösung?

  ⇒ $2^8 = 256$ *Takte*

- Wie viele Takte benötigt ein A/D-Umsetzer nach dem Parallel-Verfahren für die Digitalisierung einer Messgröße mit 8 Bit Auflösung?

  ⇒ *einen Takt*

- Warum sind digitale Messverfahren stets auch zeitlich diskontinuierlich?

  ⇒ *Für die Dauer der A/D-Umsetzung muss das Eingangssignal mit Hilfe eines Abtast-Halte-Gliedes konstant gehalten werden. Oder auch: Digitalisierung eines Signals = Abtastung (Diskretisierung in der Zeit) + Quantisierung (Diskretisierung im Wert)*

- Ein akustisches Signal (Musik, obere Grenzfrequenz 18 kHz) soll in digitaler Form gespeichert werden. Wie viele Messwerte müssen mindestens aufgenommen werden, wenn das Musikstück 3 Minuten lang ist?

  ⇒ *6,48 Millionen Messwerte*

- Eine digitale Waage soll im Messbereich von 0 g bis 300 g eine Auflösung von 2,5 mg aufweisen. Mit wie viele Bit muss der A/D-Umsetzer mindestens arbeiten?

  ⇒ $300000/2{,}5 = 120000 < 2^{17}=131072 \rightarrow 17$ *Bit*

- Eine Eingangsspannung von 4 V soll so digitalisiert werden, dass die maximale Quantisierungsabweichung kleiner als 0,6 mV ist. Wie viele Bit muss der A/D-Umsetzer mindestens aufweisen?

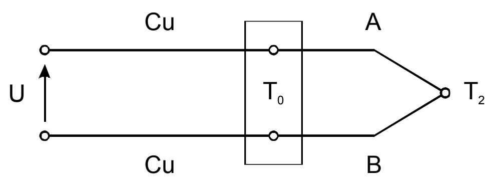
  ⇒ $4000/(2\cdot 0{,}6) = 3333{,}33 < 2^{12} = 4096 \rightarrow 12$ *Bit*

- Für die Digitalisierung eines analogen Spannungssignals steht ein 12 Bit A/D-Umsetzer zur Verfügung. Welcher maximale Messbereich lässt sich damit erfassen, wenn die Quantisierungsabweichung höchstens 1 mV betragen soll?

  ⇒ $2\cdot 0{,}001V\cdot 2^{12} = 8{,}192\ V$

- Skizzieren Sie den Aufbau eines Thermoelements und erläutern Sie dessen Wirkungsweise!

  ⇒ *Bei Thermoelementen werden zwei unterschiedliche Metalldrähte A und B verbunden und die Verbindungsstelle mit dem Messobjekt in Kontakt gebracht (Temperatur T_2). Die offenen Enden werden an die Messleitungen (meist Kupfer) angeschlossen und liegen auf der Referenztemperatur T_0. Eine Temperaturdifferenz zwischen T_0 und T_2 bewirkt durch den Seebeck-Effekt eine elektrische Spannung.*



Elementare statistische Maßzahlen

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Empirische Varianz: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$

Streuung: $S = +\sqrt{S^2}$

Konfidenzintervall

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei bekannt:

$$\left[\overline{x} - \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{x} + \frac{k \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Die Messgröße X sei normalverteilt, σ sei unbekannt.

$$\left[\overline{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

Lineare Regression

Wenn durch eine Anzahl von Wertepaaren (x_i, y_i) nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung eine Gerade gelegt wird, geht diese stets durch den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y})$ der Punkte:

$$(y - \overline{y}) = b(x - \overline{x})$$

(geschätzter) Regressionskoeffizient b (Steigung der Geraden)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

Ein Schätzwert für σ^2 ist die Restvarianz $\hat{\sigma}^2$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - \overline{y} + b(\overline{x} - x_j)\right)^2 = \frac{n-1}{n-2} \cdot S_y^2\left(1 - r_{xy}^2\right)$$

Bestimmung der Vertrauensgrenze für diese Schätzung des Steigungsmaßes:

1. Festlegen der geforderten statistischen Sicherheit P (z.B. 95%)
2. Berechnen der Streuung S_x aus den Messwerten $x_1, \ldots, x_n$
3. Der Vertrauensbereich für den Regressionskoeffizienten b zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

   $$\left[b - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}, \quad b + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n} S_x}\right]$$

4. Der Erwartungswert β für den Regressionskoeffizienten b liegt mit der statistischen Sicherheit P in diesem Intervall
5. Durch die berechnete Gerade wird einem beliebig gewählten x-Wert x* der y-Wert

   $$y^* = \overline{y} + b(x^* - \overline{x})$$

   zugeordnet. Der Vertrauensbereich für y* zur statistischen Sicherheit P = 1 – α beträgt:

$$\left[y^* - \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}, \quad y^* + \frac{\hat{\sigma} t_{n-2,1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 + \frac{(x^* - \overline{x})^2}{S_x^2}}\right]$$

Abweichungspflanzung

f sei $f(x_1, \ldots, x_n)$. Das Konfidenzintervall für f mit statistischer Sicherheit P = 1 – α:

$$\left[f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) - c_f \, , \, f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) + c_f\right]$$

für den Fall zufälliger, normalverteilter Abweichungen mit:

$$c_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n} c_{x_i}\right)^2}, \quad c_{x_i} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_{x_i}}} t_{n_{x_i}-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

t-Test

t-Test für Erwartungswert

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \qquad \text{(df = n – 1)}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 < -t_{n-1;1-\alpha},$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_0$ (einseitige Hypothese)
   Ist

   $$t_0 > t_{n-1;1-\alpha},$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_0$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist

   $$|t_0| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}},$$

   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für Vergleich zweier Erwartungswerte

Die Testgröße (einfachere Form, wenn $n_x = n_y = n$):

$$t_0 = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \qquad (df = 2n-2)$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x < \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x > \mu_y$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n_x+n_y-2;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_x = \mu_y$ gegen H_1: $\mu_x \neq \mu_y$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n_x+n_y-2;\,1-\frac{\alpha}{2}} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

t-Test für verbundene Stichproben

Die Testgröße:

$$t_0 = \frac{\bar{d}}{S_d/\sqrt{n}} \qquad (df = n-1)$$

mit:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \quad , \qquad d_i = x_i - y_i$$

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i-\bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

Test der Nullhypothese bei vorgewähltem Signifikanzniveau α:

1. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d < 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 < -t_{n-1;\,1-\alpha} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
2. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d > 0$ (einseitige Hypothese)
   Ist
   $$t_0 > t_{n-1;\,1-\alpha} \quad ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.
3. H_0: $\mu_d = 0$ gegen H_1: $\mu_d \neq 0$ (zweiseitige Hypothese)
   Ist
   $$|t_0| > t_{n-1;\,1-\frac{\alpha}{2}} \ ,$$
   wird H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Der χ2-Test für Verteilungsfunktionen

X sei eine Zufallsgröße mit unbekannter Verteilungsdichtefunktion. Aufgrund von Messdaten oder Vorabinformationen wird vermutet, das X durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben wird. Um dies zu prüfen, kann ein χ2-Test durchgeführt werden.

Nullhypothese H_0: X wird durch die Verteilungsdichtefunktion h(x) beschrieben.

Es wird eine Stichprobe von n Messwerten $x_1,...x_n$ aufgenommen.

Der Test erfolgt, indem zu dieser Messreihe ein empirisches Histogramm erstellt wird. Aus der Verteilungsdichtefunktion h(x) wird ein theoretisches Histogramm berechnet.

Als Testgröße wird eine normierte Differenz zwischen beiden Histogrammen berechnet. Wenn die Hypothese zutrifft, müsste diese Differenz hinreichend klein sein.

Vorgehensweise:

1. Aufteilen des Wertebereichs in r nicht überlappende Klassen T_i, so dass jede Klasse wenigstens 5 Werte der Stichprobe $x_1,...x_n$ enthält. Die Intervalle können auch ungleich breit sein.
2. Bestimmen der Anzahl B_i von Messwerten in der Klasse T_i
3. Falls die Verteilungsdichtefunktion h(x) Parameter enthält (z.B. μ und σ bei der Normalverteilung), so werden diese Parameter aus den Messdaten $x_1,...x_n$ abgeschätzt.
4. Berechnen der Wahrscheinlichkeit p_i, mit der bei Annahme der hypothetischen Verteilungsdichte h(x) unter Annahme der unter 3. geschätzten Parameter ein Messwert im Intervall T_i zu erwarten ist.
5. Berechnen der Produkte $E_i = np_i$, die die theoretischen Besetzungszahlen der Klasse T_i bei Annahme der Verteilungsdichte h(x) darstellen.
6. Prüfen, ob für alle Klassen gilt: $E_i \geq 5$. Klassen mit $E_i < 5$ werden mit benachbarten Klassen zusammengelegt. Nach diesem Schritt liegen r* Klassen vor mit $r^* \leq r$.
7. Berechnen der Testgröße:
   $$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{r^*} \frac{\left(B_i - E_i\right)^2}{E_i}$$
8. Bestimmung der Zahl der Freiheitsgrade:
   - r* ist die Zahl der auswertbaren Klassen (Besetzungszahl ≥ 5)
   - s ist die Zahl der aus der Stichprobe abgeschätzten Parameter der Verteilungsdichtefunktion
   - Die Zahl der Freiheitsgrade ist $df = r^* - s - 1$
9. Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit α

H_0 ist abzulehnen mit Signifikanzniveau α, wenn:

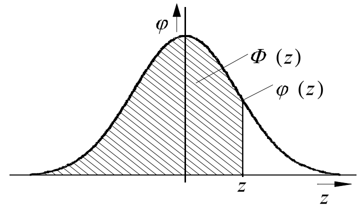
$$\chi_0^2 > \chi^2_{r^*-s-1;1-\alpha}$$

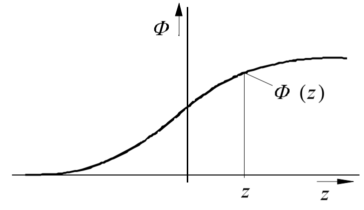
Tabelle 1

Summenfunktion der standardisierten Normalverteilung

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}dt\ ;\ \ \Phi(z)=1-\Phi(-z)$$

Ablesebeispiel: $\Phi(0{,}76)=0{,}776373$





z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856	0,0
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345	0,1
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092	0,2
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732	0,3
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933	0,4
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719043	0,722405	0,5
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903	0,6
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236	0,7
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267	0,8
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913	0,9
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143	1,0
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977	1,1
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475	1,2
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736	1,3
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888	1,4
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083	1,5
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486	1,6
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273	1,7
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621	1,8
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705	1,9
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691	2,0
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738	2,1
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989	2,2
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576	2,3
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613	2,4
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201	2,5
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427	2,6
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365	2,7
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074	2,8
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605	2,9

z	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	z
Φ(z)	$1-1{,}350\cdot10^{-3}$	$1-2{,}326\cdot10^{-4}$	$1-3{,}167\cdot10^{-5}$	$1-3{,}398\cdot10^{-6}$	$1-2{,}867\cdot10^{-7}$	$1-9{,}866\cdot10^{-10}$	$1-1{,}280\cdot10^{-12}$	$1-6{,}221\cdot10^{-16}$	$1-1{,}129\cdot10^{-19}$	$1-7{,}620\cdot10^{-24}$	Φ(z)

Φ(z)	50%	60%	70%	80%	90%	95%	97,5%	99%	99,5%	99,75%	99,9%	99,95%	Φ(z)
z	0	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	3,090	3,291	z

Tabelle 2: p-Quantile $t_{s,p}$ der Student'schen t-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,671	2,000	2,390	2,660
70	1,667	1,994	2,381	2,648
80	1,664	1,990	2,374	2,639
90	1,662	1,987	2,368	2,632
100	1,660	1,984	2,364	2,626
200	1,653	1,972	2,345	2,601
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

Tabelle 3: p-Quantile $\chi^2_{s,p}$ der χ^2-Verteilung mit s Freiheitsgraden

s \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,8
6	10,6	12,6	14,5	16,8	18,6
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8
12	18,6	21,0	23,3	26,2	28,3
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8
14	21,2	23,7	26,1	29,1	31,3
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8
16	23,5	26,3	28,9	32,0	34,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7
40	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8
50	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5
60	74,4	79,1	83,3	88,4	92,0
70	85,5	90,5	95,0	100,4	104,2
80	96,6	101,9	106,6	112,3	116,3
90	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2